

Università degli Studi di Padova



Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

**APPUNTI DEL CORSO
"ISTITUZIONI DI FISICA NUCLEARE"**

DI

LEONARDO PACCIANI MORI

Anno accademico 2014-2015

Questo materiale è rilasciato sotto la licenza *Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale*



Ciò significa che questo materiale può essere liberamente modificato e ridistribuito, a patto di citare la fonte, rilasciarlo sempre sotto questa licenza e di non usarlo per scopi commerciali.

Giugno 2015

Introduzione

Questo documento è la trascrizione dei miei appunti del corso *Istituzioni di Fisica nucleare*, tenuto dal prof. Andrea Vitturi e dalla prof.ssa Donatella Lucchesi nel terzo anno del Corso di Laurea in Fisica presso il dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei” dell’Università degli Studi di Padova durante l’anno accademico 2014-2015.

Come tale, non è un documento con molte pretese di completezza o di forma. Solo per fare un esempio, per non perdere troppo tempo e energie ho disegnato a mano le figure presenti nel documento (a parte qualche rara eccezione). Date le mie *limitatissime* capacità grafiche, molte non sono venute un granché; spero solo che siano perlomeno comprensibili.

Ho deciso di rilasciare questi appunti insieme al loro codice sorgente \LaTeX , di modo che chiunque possa eventualmente modificarli a seconda delle proprie esigenze. Il materiale (compresi gli appunti di altri corsi) si trova tutto sul sito leonardo.pm/teaching.

La licenza sotto la quale questo documento è rilasciato è la *Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale*. In sintesi, ciò significa che questo documento (incluso il suo codice sorgente) può essere modificato e ridistribuito liberamente, a condizione che sia sempre citata la fonte del documento originale, che sia rilasciato sempre sotto questa licenza e che non venga utilizzato per scopi commerciali o di lucro.

Non è escluso che ci possano essere degli errori, qua e là, anche se ho cercato di essere il più meticoloso possibile nel scovarli. In caso, mi scuso anticipatamente.

Ringrazio anche tutti coloro che mi hanno aiutato a correggere questo documento segnalandomi errori e sviste.

Padova, Giugno 2015
Leonardo Pacciani Mori

Indice

I	Fisica nucleare	2
1	Il nucleo atomico	4
1.1	Primi fatti e definizioni	4
1.1.1	Masse dei nucleoni	4
1.1.2	Spin dei nucleoni	4
1.1.3	Parità dei nucleoni	5
1.1.4	Momento magnetico dei nucleoni	5
1.1.5	Proprietà dei momenti di dipolo magnetico e elettrico	6
1.2	Proprietà dei nuclei atomici	7
1.2.1	Il raggio e la massa del nucleo	7
1.2.2	Lo spin isotopico	8
1.3	Il deutone	8
1.3.1	Le proprietà del deutone	9
1.3.2	Un modello per l'interazione fra nucleoni	10
1.4	Riassunto delle principali proprietà dell'interazione fra nucleoni	11
1.5	Stabilità dei nuclei e decadimenti radioattivi	12
1.5.1	Trizio e ^3He	12
1.5.2	^4He , o particelle α	12
1.5.3	Nuclei successivi	13
1.6	I decadimenti	14
2	Modelli per nuclei medi e pesanti	16
2.1	Il modello a gas di Fermi	16
2.2	Il modello a goccia di liquido	18
2.2.1	Formula semi-empirica di massa	19
2.3	Modello a shell	23
2.3.1	Potenziale armonico	23
2.3.2	Potenziale di Woods-Saxon	24
2.3.3	Generalizzazione a più nucleoni	27
3	I decadimenti	29
3.1	Introduzione	29
3.2	Decadimenti α	29
3.2.1	Generalità	29
3.2.2	Decadimenti spontanei e stimolati	30
3.2.3	Q-valore e vita media del decadimento	30
3.2.4	Pre-esistenza della particella α	31
3.2.5	Interazione fra particelle α e la materia	32
3.3	Decadimenti β	32
3.3.1	Generalità	32
3.3.2	Energia degli elettroni ed esistenza dei neutrini	33
3.3.3	Tipologie di decadimenti β^-	34
3.3.4	Alcune note sui decadimenti β	35

3.3.5	Esempi di decadimenti β	36
3.3.6	Cattura elettronica	38
3.4	Decadimenti γ	38
3.4.1	Generalità	38
3.4.2	Tipi di radiazione γ	40
II	Fisica subnucleare	42
1	Introduzione	44
1.1	La fisica subnucleare	44
1.2	Cinematica delle particelle elementari	45
1.3	Collisioni	47
1.3.1	Collisioni a targhetta fissa	47
1.3.2	Collider	48
2	La scoperta delle particelle elementari	51
2.1	Da Thomson a Rutherford	51
2.2	I raggi cosmici	52
2.3	I mesoni K	52
2.4	La storia dei leptoni	54
2.5	Simmetrie	55
2.5.1	Parità	55
2.5.2	Coniugazione di carica	56
2.5.3	Invarianza temporale	57
2.5.4	La simmetria CPT	57
2.5.5	Altre simmetrie	58
2.6	Il modello a quark	58
2.6.1	Le risonanze	58
2.6.2	I quark	59
3	Le interazioni fondamentali	63
3.1	Trattazione quantistica dell'elettromagnetismo	63
3.1.1	I diagrammi di Feynman	63
3.1.2	Propagatore di un campo	66
3.1.3	Risonanze e costante di struttura fine	66
3.2	Teoria delle interazioni forti	68
3.2.1	La carica di colore	70
3.2.2	Il modello dinamico dei nucleoni	71
3.2.3	Costante di accoppiamento dell'interazione forte	72
3.3	Teoria delle interazioni deboli	73
3.3.1	Mescolamento dei quark e oscillazioni di stranezza	75
3.3.2	Violazione di CP	78
3.4	Unificazione elettrodebole	78

Parte I

Fisica nucleare

Capitolo 1

Il nucleo atomico

1.1 Primi fatti e definizioni

Un *nucleo atomico* è un sistema (quantistico) composto da protoni e neutroni (detti collettivamente *nucleoni*) fortemente interagenti. L'interazione che li lega, però, è l'interazione forte, che non è esprimibile esplicitamente (non esiste una "formuletta" come nel caso della forza coulombiana).

Chiamiamo Z (detto *numero atomico*) il numero di protoni, e N quello di neutroni all'interno di un nucleo. Definiamo poi $A = Z + N$ il *numero di massa* del nucleo atomico.

Il numero atomico identifica il tipo di elemento col quale abbiamo a che fare, e storicamente per rappresentare univocamente un elemento si usa indicare il suo numero di massa insieme al simbolo relativo all'elemento¹.

In natura esistono elementi con stesso numero atomico Z ma diverso numero di massa A (ossia con un diverso numero di neutroni), detti *isotopi*. Questi, nonostante abbiano caratteristiche chimiche quasi identiche, sono fisicamente molto diversi. Consideriamo infatti gli isotopi ^{12}C e ^{13}C ; poiché (come avremo modo di specificare meglio) protoni e neutroni hanno entrambi spin $1/2$, e poiché il numero quantico del momento angolare orbitale (ℓ) è sempre intero, ci aspettiamo che ^{12}C abbia spin totale intero, mentre ^{13}C semi-intero (perché ^{12}C ha un numero pari di nucleoni, mentre ^{13}C dispari). Pertanto ^{12}C è un bosone e ^{13}C un fermione, e dunque hanno proprietà fisiche assai diverse (in quanto obbediscono a statistiche differenti).

1.1.1 Masse dei nucleoni

Vedremo più avanti che se le interazioni fra i quark (i componenti dei nucleoni) soddisfano determinate proprietà, allora le masse del protone e del neutrone dovrebbero essere identiche, modulo la presenza dell'interazione coulombiana. Effettivamente, risulta che $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ e $m_n = 939 \text{ MeV}/c^2$.

Ci aspetteremmo poi, che i protoni siano più instabili dei neutroni, proprio perché l'interazione coulombiana tende a "separarli". In realtà, vedremo che poiché $m_n > m_p$ il neutrone risulterà più instabile del protone, rendendo possibili processi come il decadimento beta.

1.1.2 Spin dei nucleoni

Protoni e neutroni sono anche dotati di spin.

Diamo per note le proprietà dell'algebra dei momenti angolari in meccanica quantistica (e la composizione di più momenti angolari), che accenniamo brevemente.

Sappiamo che se una tripletta (L_1, L_2, L_3) di operatori soddisfa delle date proprietà di commutazione, allora gli operatori $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ e (ad esempio) L_3 hanno determinate proprietà.

Se poi $\vec{J}_1 = (J_1^x, J_1^y, J_1^z)$ e $\vec{J}_2 = (J_2^x, J_2^y, J_2^z)$ sono due operatori di momento angolare, allora detto $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ e detti $|j_1, m_1\rangle$ e $|j_2, m_2\rangle$, gli autostati, rispettivamente, delle coppie di operatori (J_1^2, J_1^z) e (J_2^2, J_2^z) , potremmo chiederci se $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ è autostato di J^2 e J^z ; risulta che questa base di stati, detta *base disaccoppiata*, non lo è,

¹Ad esempio, a $Z = 6$ corrisponde l'elemento *carbonio*, e ^{12}C indica del carbonio con $A = 12$, dunque $N = A - Z = 6$.

pur essendo completa. Gli autostati $|J, M\rangle$ di J^2 e J_z sono:

$$|J, M\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ M=m_1+m_2}} \underbrace{(\langle j_1, m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 |)}_{\text{“coefficienti di Clebsch-Gordan”}} |J, M\rangle |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

Noti j_1 e j_2 , poi, risulta $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ (a “salti” di 1).

Protoni e neutroni hanno spin $1/2$, e dunque i nuclei atomici sono sistemi fermionici. Interagendo fra di loro, poi, ognuno dei nucleoni avrà un momento angolare orbitale (rispetto al centro di massa del sistema), che come tale dovrà essere intero.

Il sistema nucleare composto più semplice possibile è il *deutone* (poi lo vedremo più in dettaglio), composto da un protone e un neutrone. Ponendosi nel centro di massa, poiché il momento angolare totale del sistema è composto dagli spin dei due nucleoni (che, essendo entrambi $1/2$ daranno luogo a uno spin totale intero, in particolare 0 o 1) e dai loro momenti angolari orbitali (interi “per definizione”), allora il momento angolare totale del deutone sarà intero. Se invece consideriamo il *trizio*, composto da due neutroni e un protone, il momento angolare totale comprenderà anche il momento angolare orbitale (intero) e lo spin (semi-intero) del nuovo protone. Il trizio avrà dunque momento angolare totale semi-intero.

Detti J e S il momento angolare orbitale e lo spin totale di un nucleo atomico, se l’hamiltoniana H del sistema commuta con gli operatori J e S allora gli autostati $|JM\rangle$ sono anche autostati di H , e pertanto saranno caratterizzati da un buon valore dello spin.

1.1.3 Parità dei nucleoni

Conosciamo poi anche l’operatore parità π , che inverte le coordinate spaziali della funzione d’onda su cui agisce.

Si può dimostrare che π è hermitiano, e poiché $\pi^2 = \text{id}$, gli unici autovalori possibili di π sono $+1$ e -1 ; come al solito, se H è invariante per parità gli autostati di H sono caratterizzati da un buon valore della parità.

Protoni e neutroni non hanno una parità definita, e per convenzione la si assume positiva. Per questo, lo stato di un nucleone si indica con $1/2^+$.

1.1.4 Momento magnetico dei nucleoni

Consideriamo un elettrone in orbita intorno a un punto a una distanza r da esso. Questo sistema avrà un momento di dipolo magnetico (orbitale) tale che²:

$$|\vec{\mu}_\ell| := \mu_\ell = iS = \frac{e}{T} \pi r^2 = \frac{e}{2\pi} \omega \pi r^2 = \frac{e}{2m} \omega r^2 m = \frac{e}{2m} \hbar \ell$$

(ove abbiamo sfruttato il fatto che $\omega r^2 m$ è il momento angolare dell’elettrone). Con la definizione $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ del *magnetone di Bohr* si ha dunque:

$$\mu_\ell = \mu_B \ell$$

Tuttavia, anche lo spin dell’elettrone contribuisce al momento di dipolo magnetico totale. In particolare, si ha:

$$\mu_s = \mu_B g_s s$$

ove g_s è il *rapporto giromagnetico*, che per l’elettrone vale circa 2.

Consideriamo adesso lo stesso sistema, ma con un protone al posto dell’elettrone. I ragionamenti e i risultati sono esattamente gli stessi, a patto di sostituire la massa dell’elettrone con quella del protone, che è circa 2000 volte più grande. Si utilizzerà dunque il *magnetone nucleare* μ_N , circa 2000 volte più piccolo di quello di

²Lo calcoliamo nel modo “classico”, ossia come corrente per superficie.

Bohr. Per lo spin valgono esattamente gli stessi ragionamenti.

Se invece consideriamo un neutrone, questo non avrà momento di dipolo magnetico orbitale perché non è carico.

Se poi il protone e il neutrone fossero particelle elementari, ossia non costituite da particelle più piccole, ci aspetteremmo che i rapporti giromagnetici dell'elettrone e del protone siano uguali, mentre che quello del neutrone sia nullo (perché non ha carica).

In realtà, sperimentalmente risulta che il rapporto giromagnetico per il protone vale 5.5, mentre quello del neutrone -3.8. Ciò è indice del fatto che i nucleoni hanno una struttura interna, e sono composti da elementi costituenti carichi (in modo tale che i nucleoni abbiano proprio quei valori di carica e rapporto giromagnetico), che vedremo poi essere i *quark*.

1.1.5 Proprietà dei momenti di dipolo magnetico e elettrico

Supponiamo di avere un sistema unidimensionale, con potenziale $V(x)$ e una particella ad esso soggetta. Supponiamo poi che φ_n siano gli autostati legati dell'hamiltoniana di questo sistema. A seconda delle proprietà di questo potenziale, un particolare autostato del sistema potrà essere pari o dispari. Supponiamo dunque che $\varphi_n(x) = \varphi_n(-x)$, e cerchiamo di determinare gli elementi della diagonale di un dato operatore, ad esempio O , che ha una sua rappresentazione $O(x)$. Allora:

$$\langle \varphi_n | O | \varphi_n \rangle = \int \bar{\varphi}_n(x) O(x) \varphi_n(x) dx$$

Se dunque ad esempio O è pari ($O(x) = O(-x)$), questi elementi di diagonale in generale non saranno nulli, mentre se O è dispari ($O(-x) = -O(x)$) saranno tutti nulli (perché l'integrando sarà sempre dispari).

Se invece di considerare elementi di diagonale consideriamo elementi di transizione, del tipo $\langle \varphi_m | O | \varphi_n \rangle$ con $m \neq n$, poiché le proprietà di simmetria degli autostati φ_m e φ_n possono differire (ad esempio, uno può essere pari e l'altro dispari), allora questi in generale non saranno nulli.

Supponiamo ora di avere un sistema tridimensionale (anche a molti corpi) con hamiltoniana H invariante per rotazioni e inversioni degli assi: allora gli autostati φ_n di H saranno caratterizzati da un buon valore del momento angolare e della parità (li rappresentiamo come J^π). In questo caso anche gli operatori possono essere caratterizzati da un buon valore del momento angolare. Spieghiamo perché ciò accade: le transizioni fra due stati possono avvenire solo se il sistema interagisce con un campo di qualche tipo (ad esempio elettromagnetico), perché attraverso di esso possiamo fornire al sistema l'energia necessaria per la transizione. A questo campo, in generale, sarà associato l'operatore che permette la transizione (come $\widehat{M}1$ o $\widehat{E}1$ negli esempi successivi), e a questo campo sarà associato un momento angolare (detto anche *elicità*), che sostanzialmente è il momento angolare dei mediatori del campo stesso. È questo momento angolare che viene associato agli operatori; dobbiamo tenerne conto perché nelle transizioni si dovrà conservare il momento angolare: se ad esempio un fotone (che ha spin 1) urta contro un atomo, eccitando un elettrone, quest'ultimo potrà transire solo in stati tali da soddisfare la conservazione, oltre che dell'energia, del momento angolare (il momento angolare del fotone verrà "ceduto" all'elettrone). È da questo (come dopo facciamo vedere) che scaturiscono le regole di selezione (come quelle che regolano le transizioni di un elettrone in un atomo, appunto).

Ad esempio, detto $\widehat{M}1$ l'operatore associato al momento di dipolo magnetico, questo ha momento angolare $\lambda = 1$ (perché il campo elettromagnetico ha elicità 1) e $\pi = 1$. Dunque, un suo generico elemento di matrice è $\langle \varphi_m | \widehat{M}1 | \varphi_n \rangle$; a seconda del momento angolare e della parità degli autostati φ_m e φ_n , questo elemento di matrice potrà essere nullo o meno. Poiché questo elemento di matrice è legato alla probabilità che il sistema passi dallo stato φ_m allo stato φ_n , ciò significa che l'operatore $\widehat{M}1$ soddisfa determinate regole di selezione.

Esiste anche l'operatore di momento di dipolo elettrico $\widehat{E}1$, che ha momento angolare $\lambda = 1$ (per lo stesso motivo di prima) e $\pi = -1$; in questo caso, dunque, gli elementi di diagonale di $\widehat{E}1$ sono tutti nulli (la parità dell'integrando è sempre negativa): pertanto, nessun sistema quantistico può avere momento di dipolo elettrico. Considerazioni analoghe valgono anche per il momento di quadrupolo elettrico $\widehat{E}2$.

1.2 Proprietà dei nuclei atomici

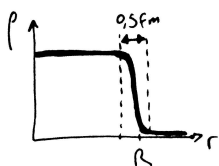
1.2.1 Il raggio e la massa del nucleo

Ci possiamo dunque chiedere come siano distribuiti i nucleoni all'interno del nucleo; ciò che “tiene insieme” protoni e neutroni è l'interazione forte, che come vedremo è a raggio estremamente corto (al contrario di quella coulombiana), e pertanto ci aspettiamo che a differenza degli elettroni in un atomo i nucleoni siano estremamente compatti e a densità molto elevata.

L'esperimento di Rutherford ha permesso di capire qual è la struttura atomica, consentendo di ricavare una prima stima delle dimensioni del nucleo (che è dell'ordine dei femtometri). Usando particelle più leggere (come elettroni, ad alte energie) di quelle usate da Rutherford, ossia particelle α , si possono fare stime ancora più precise.

Per capire invece quale sia la struttura interna dei nuclei (ossia come siano distribuite carica e massa al loro interno) si possono fare altri tipi di esperimenti:

- Si può, ad esempio, effettuare spettroscopia su *atomi mesici*. Questi ultimi sono atomi in cui gli elettroni sono sostituiti da muoni, particelle che hanno la stessa carica dell'elettrone ma massa circa 200 volte più grande. In questo modo, i muoni tenderanno a trovarsi a distanze minori dal nucleo rispetto agli elettroni, risentendo maggiormente della struttura interna del nucleo. Per questo, le linee dello spettro di atomi mesici sono “spostate” rispetto a quelle “canoniche”, e questo “spostamento” dipende anche dalla distribuzione di carica nel nucleo.
- Molte informazioni possono essere estratte dai raggi X emessi da atomi pesanti: in questi, infatti, gli elettroni degli stati a energia più bassa tenderanno a trovarsi molto vicino al nucleo, risentendo anch'essi della distribuzione di carica al suo interno.
- Per ogni elemento è definibile il suo *elemento speculare*, ottenuto scambiando Z e N . Ad esempio, per ${}^7\text{Li}$ si ha $Z = 3$ e $N = 4$, e dunque il suo elemento speculare è ${}^7\text{Be}$, che ha $Z = 4$ e $N = 3$.
Le interazioni fra gli elementi di un nucleo potranno essere necessariamente di tre tipi: protone-protone, neutrone-neutrone e protone-neutrone. Ora supponendo questi tre tipi di interazioni diversi fra loro, all'interno dei nuclei di ${}^7\text{Li}$ e ${}^7\text{Be}$ ci sono un numero diverso di interazioni differenti, e dunque ci aspetteremmo che i nuclei di ${}^7\text{Li}$ e ${}^7\text{Be}$ siano molto diversi. Sperimentalmente, però, gli spettri di questi due elementi sono “praticamente uguali”, e quindi questi tre tipi di interazioni sono uguali. Per “praticamente uguali” si intende che sono identici se poniamo sullo stesso livello lo stato fondamentale: infatti, i nuclei di berillio e litio hanno cariche diverse, e quindi energie diverse³.



Risulta, insomma, che la carica e la materia sono distribuite uniformemente all'interno del nucleo. In altre parole, la densità di materia in un nucleo è quasi costante⁴ entro un certo raggio, e poi cade rapidamente a zero in una zona dell'ordine di mezzo femtometro.

Pertanto, il raggio di un nucleo è una quantità ben definita (al contrario, ad esempio, del raggio atomico). Si ha poi che i valori tipici del raggio di un nucleo variano fra 1 e 7 fm⁵.

Poiché dunque la densità di materia tende a saturare all'interno del nucleo, possiamo dedurre che i nucleoni si comportino, a brevissime distanze, come delle “palline rigide” fra loro impenetrabili (se infatti ciò non accadesse, la densità di materia crescerebbe al diminuire del raggio, all'interno di un nucleo). Questa considerazione ci servirà anche più avanti.

³Ricordare che l'energia di una distribuzione sferica uniforme di carica è $E = \frac{3}{5} \frac{q^2}{R}$, e pertanto la differenza di energia fra gli stati fondamentali di ${}^7\text{Li}$ e ${}^7\text{Be}$ è $\Delta E = \frac{3}{5} \frac{4^2 - 3^2}{R} e^2$ (in tutto questo abbiamo supposto che i raggi dei nuclei siano gli stessi).

⁴In realtà oscilla un po', diversamente per ogni elemento.

⁵Lo si può vedere per esempio con ${}^{208}\text{Pb}$: considerando il nucleo di piombo come una “palla” fatta di “palline rigide più piccole”, i nucleoni, di raggio $r_p = r_n \simeq 1.2\text{fm}$, allora il raggio R del piombo è $R = A^{1/3} r_n$. Infatti, se una “sfera” di raggio R è fatta di A “sfere molto più piccole” di raggio r_0 , supponendo trascurabile lo spazio fra le “sfere più piccole” allora:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = A \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

Per il piombo (un elemento molto “grosso”) risulta $R \simeq 7\text{ fm}$.

Per quello che invece riguarda la massa complessiva di un nucleo, un nucleo è un sistema legato (ossia ha energia minore rispetto alla configurazione in cui tutti i suoi componenti sono liberi). Pertanto in generale, detta $M(Z, N)$ la massa di un nucleo, si ha $M(Z, N) < Zm_p + Nm_n$: la massa “mancante” ΔM è l’energia necessaria a scindere il nucleo nelle sue particelle componenti.

1.2.2 Lo spin isotopico

Abbiamo dunque capito che, a parte l’interazione coulombiana, protoni e neutroni sono identici⁶. Ciò può essere formalizzato introducendo lo *spin isotopico* o *isospin*.

Ciò che si fa è introdurre una nuova terna di operatori $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$, detti *di isospin*, definiti in modo tale che per t_1, t_2 e t_3 valgano le stesse regole di commutazione dello spin (lo spazio in cui è definito l’isospin è uguale a quello dello spin, visto che le loro algebre sono le stesse). Si assume poi che protone e neutrone siano gli autostati di t^2 e t_3 con $t = 1/2$ e $t^3 = 1/2$ per il protone e $t^3 = -1/2$ per il neutrone. Insomma, consideriamo protone e neutrone come due “stati” di una stessa “particella”: in questo modo possiamo considerarle effettivamente come particelle identiche ma distinguibili (in base alla presenza dell’interazione elettromagnetica)⁷.

Componendo più isospin (con le stesse regole dello spin, visto che entrambi hanno la stessa algebra) possiamo dunque studiare come si accoppiano più nucleoni. Ad esempio, se ogni nucleone ha $t = 1/2$ allora l’isospin totale potrà essere:

$$T = 1 \quad \Rightarrow \quad M_T = \begin{cases} 1 & \text{protone-protone} \\ 0 & \text{protone-neutrone} \\ -1 & \text{neutrone-neutrone} \end{cases}$$

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad M_T = 0 \quad \text{protone-neutrone}$$

Se dunque l’hamiltoniana è invariante nello spazio dell’isospin, gli stati con $T = 1$ saranno energeticamente degeneri, mentre il sistema protone-neutrone può avere più energie (può avere isospin totale 0 oppure 1).

Per quello che riguarda la parità di una funzione d’onda, tenendo conto anche dell’isospin (oltre che dello spin e del momento angolare orbitale) si ha che questa è $(-1)^\ell (-1)^{s+1} (-1)^{t+1}$.

1.3 Il deutone

Come già detto, il più semplice sistema nucleare composto è il deutone, che è un sistema legato e composto da un protone e un neutrone.

Lo studio del deutone permette di comprendere la natura dell’interazione che si esercita fra nucleoni (in particolare, fra protoni e neutroni).

Sperimentalmente (come avevamo d’altronde già evidenziato in generale), la massa del deutone è minore della somma delle masse dei suoi componenti, ossia $m_d < m_p + m_n$, e ciò è dovuto all’energia di legame del sistema. Per il deutone si ha:

$$\Delta m = (m_p + m_n) - m_d \simeq 2.2 \text{ MeV}/c^2$$

e dunque $\Delta E = \Delta mc^2 = 2.2 \text{ MeV}$ è l’energia di legame del deutone (ossia, ribadiamolo, quella che bisogna fornire al sistema per scinderlo in un protone e un neutrone).

Per confronto, l’energia di legame dell’idrogeno nello stato fondamentale è $E = -13.6 \text{ eV}$: ci sono cinque ordini di grandezza di differenza fra le due energie di legame, e questo è espressione del fatto che l’interazione fra i nucleoni è molto più forte di quella coulombiana (o, in altre parole, i nuclei sono molto più “compatti”

⁶Un’altra conferma di ciò viene anche dallo studio degli urti protone-protone e protone-neutrone.

⁷Allo stesso modo, in un sistema di due elettroni con spin antiparallelo, questi saranno identici (perché sono comunque elettroni) ma distinguibili (in base allo spin).

dell'atomo).

Dall'energia di legame dell'idrogeno si può ricavare il "raggio" dell'atomo:

$$E_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = 13.6 \text{ eV} \quad \Rightarrow \quad r \simeq 10^5 \text{ fm} = 1 \text{ \AA}$$

1.44 MeV·fm

Sappiamo poi che il raggio d'azione dell'interazione nucleare è dell'ordine dei fm: in questo modo possiamo vedere proprio come l'interazione nucleare sia sì molto più forte di quella coulombiana, ma anche a raggio molto più breve (in entrambi i casi ci sono differenze di circa cinque ordini di grandezza).

1.3.1 Le proprietà del deutone

Sperimentalmente, risulta che un deutone nello stato fondamentale ha:

- Momento angolare totale uguale a 1
- Parità positiva
- Momento di dipolo magnetico:

$$\mu_{\text{magn}} \not\approx \mu_p + \mu_n$$

ossia momento di dipolo magnetico leggermente diverso dalla somma dei momenti di dipolo magnetico dei suoi costituenti, perché ci sono anche i momenti di dipolo magnetico orbitali

- Momento di quadrupolo elettrico $Q_{\text{el}} \neq 0$

Poniamoci nel centro di massa del sistema. Ogni nucleone ha la propria funzione d'onda, e ci aspettiamo che la funzione d'onda complessiva di tutto il deutone contenga un termine con un buon valore del momento angolare orbitale (proprio perché il protone e il neutrone si muovono intorno al centro di massa). Per quello che invece riguarda il momento angolare totale, si ha:

$$\vec{J} = \vec{s}_p + \vec{s}_n + \vec{\ell}$$

ove \vec{s}_p e \vec{s}_n sono gli spin dei nucleoni, e $\vec{\ell}$ il momento angolare orbitale totale. Poiché protone e neutrone hanno spin 1/2, lo spin totale \vec{S} potrà essere uguale a $\vec{0}$ ("singoletto di spin") o $\vec{1}$ ("tripletto di spin").

Poiché sperimentalmente \vec{J} dev'essere 1, gli unici valori possibili per $\vec{\ell}$ sono 0, 1 e 2 (in questo modo, infatti, sommando i momenti angolari è sempre possibile ottenere un momento angolare totale pari a 1: se infatti $\vec{S} = 1$, $\vec{\ell}$ può essere 0, 1 o 2, e se $\vec{S} = 0$ allora $\vec{\ell} = 1$).

La parità totale del sistema sarà data dal prodotto di quelle dei nucleoni (positive) e quella del momento angolare orbitale. In particolare, si avrà $P = (-1)^\ell = +1$, e pertanto ℓ può avere solo valore pari; pertanto il caso $S = 0$ è sicuramente escluso, e dunque si avrà $S = 1$ e $\ell = 0$ oppure $\ell = 2$.

Pertanto, per ricapitolare, nello stato fondamentale del deutone si ha $S = 1$ e $\ell = 0, 2$. Verrebbe da pensare che lo stato "preferito" dal sistema sia quello con $\ell = 0$, perché dovrebbe essere quello con energia minima. Vediamo se questo ragionamento è compatibile con i risultati sperimentali.

Il momento magnetico del deutone è:

$$\mu_{\text{magn}} = \mu_p + \mu_n + \underbrace{\mu_{\text{orb}}}_{=g_p \ell}$$

Se dunque ℓ fosse zero allora il momento magnetico del deutone dovrebbe essere uguale alla somma di quello del neutrone e del protone. Poiché però sperimentalmente questo non è verificato, allora ℓ non può essere "solo" zero. Con questo si intende che (lo si verifica sperimentalmente) la funzione d'onda del deutone nello stato fondamentale ha un 96% di componente con $\ell = 0$ e un 4% con $\ell = 2$.

Ragionamenti del tutto analoghi possono essere fatti per il momento di quadrupolo elettrico: questo infatti dipende solo dal momento angolare orbitale, e poiché sperimentalmente non è nullo, allora ℓ non può essere

solo nullo.

Da tutti questi ragionamenti possiamo trarre una conclusione importante: l'interazione protone-neutrone non è invariante sotto rotazioni. Infatti, gli autostati di un'hamiltoniana hanno un buon valore di ℓ solo se il potenziale a cui le particelle sono soggette è centrale, ma abbiamo appena visto che nello stato fondamentale il deutone non ha un valore ben definito di ℓ . Pertanto, l'interazione forte non è di tipo centrale, come quella coulombiana.

Riconsideriamo infine le proprietà di simmetria del deutone, o meglio della sua funzione d'onda pensata come funzione d'onda di un sistema di due nucleoni.

Per quello che riguarda lo spin, la parte della funzione d'onda ad esso relativa sarà pari, perché in generale ha parità $(-1)^{s+1}$, e $S = 1$. Per quanto appena visto, poi, è simmetrica anche nella parte di momento angolare orbitale.

Se dunque consideriamo protone e neutrone come particelle identiche a meno dell'isospin, allora nello spazio dell'isospin la funzione d'onda del deutone dovrà essere antisimmetrica: infatti la funzione d'onda complessiva dovrà essere dispari perché il deutone è un sistema di fermioni. Poiché la parità dell'isospin è $(-1)^{t+1}$, necessariamente per il deutone $T = 0$ (a priori si poteva avere anche $T = 1$ perché il sistema è composto da un protone e un neutrone, ma per quanto appena visto non è possibile); si dice anche che il sistema è in un "singoletto di isospin".

Riconsideriamo i tre tipi di sistemi che avevamo nominato poco fa, ossia protone-protone, protone-neutrone (deutone) e neutrone-neutrone. Come già detto, se l'hamiltoniana del sistema è invariante nello spazio di isospin, ci aspettiamo che gli stati con $T = 1$ (ossia protone-protone e neutrone-neutrone) abbiano la stessa energia. Sperimentalmente, risulta (trascurando l'interazione coulombiana, se presente):

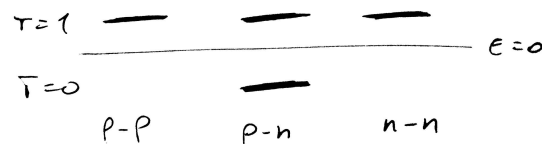


Figura 1.1: Energia di stati con diverso isospin

Pertanto, un deutone può avere $T = 1$ solo in stati eccitati.

Da ciò possiamo trarre un'importante conclusione, ossia che l'interazione protone-neutrone è più forte delle altre (perché ha energia minore, nello stato con $T = 0$).

Una nota sul momento angolare del deutone: il fatto che questo abbia momento angolare totale intero implica che il deutone, complessivamente, è un bosone. Ciò significa che un gas di deutoni è un gas bosonico, ossia la sua funzione d'onda è simmetrica *rispetto allo scambio di due deutoni*. Non dobbiamo infatti farci "ingannare" dal fatto che i deutoni siano composti di fermioni: se consideriamo i deutoni come un unico oggetto, dobbiamo "dimenticarci" della loro struttura fermionica interna (anche se il tipo di interazione che si eserciterà fra deutoni dovrà tenerne conto).

1.3.2 Un modello per l'interazione fra nucleoni

Elaboriamo un semplice modello per capire quanto più intensa sia l'interazione nucleare rispetto a quella coulombiana.

Approssimiamo dunque il potenziale d'interazione nucleare come una buca (finita) di potenziale:

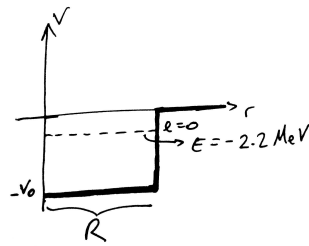


Figura 1.2: Modello per l'interazione nucleare

Si ha $R \simeq 2$ fm, e la massa ridotta del sistema è $m_r \simeq \frac{1}{2}m_p$ (perché protone e neutrone hanno masse quasi identiche).

Dobbiamo dunque risolvere l'equazione di Schrödinger per questo potenziale, con V_0 tale da permettere l'esistenza di uno stato legato con $\ell = 0$ e $E = -2.2$ MeV. Svolgendo i conti, risulta $V_0 \simeq 35$ MeV.

Rispetto al caso coulombiano, la buca è molto più profonda, di diversi ordini di grandezza.

Abbiamo considerato un potenziale a corto raggio perché nel nucleo protoni e neutroni sono molto “vicini”, e questo suggerisce proprio che l'interazione sia apprezzabile solo a breve raggio.

Questo fatto può anche essere visto in termini di particelle mediatrici di campo: prendendo per buono che un campo possa essere mediato da delle particelle, se il mediatore ha vita media breve allora l'interazione sarà a corto raggio, altrimenti no. Ad esempio, i fotoni sono i mediatori del campo elettromagnetico, e hanno vita media infinita: pertanto il campo elettromagnetico ha raggio d'azione lunghissimo (teoricamente infinito).

Da ciò possiamo dunque intuire che i mediatori dell'interazione nucleare hanno una vita media finita.

1.4 Riassunto delle principali proprietà dell'interazione fra nucleoni

Insomma, per ricapitolare, l'interazione nucleone-nucleone:

- **È fortemente attrattiva**, e come abbiamo visto se la schematizziamo brutalmente come una buca di potenziale questa risulta molto profonda
- **È indipendente dalla carica**, nel senso che l'interazione protone-protone è identica a quella neutrone-neutrone; in altre parole, a parità di spin isotopico l'interazione non dipende dal valore della terza componente dell'isospin (ma può ovviamente dipendere dal suo valore totale). Come vedremo, una “dimostrazione” di questo fatto è che i nuclei leggeri (A circa minore di 40) stabili (per i quali cioè la repulsione coulombiana è significativamente più debole dell'interazione nucleare) sono quelli per i quali $N \simeq Z$, cosa che non sarebbe vera se le interazioni neutrone-neutrone e protone-protone fossero molto diverse. Risulta anche che l'interazione neutrone-protone è uguale alle altre due; tuttavia, dobbiamo tener conto del fatto che i nucleoni sono fermioni e pertanto ubbidiscono al principio di esclusione di Pauli. Quindi, due protoni o due neutroni non potranno occupare lo stesso stato, e dovranno dunque necessariamente accoppiarsi in un singoletto di spin. Una combinazione protone-neutrone, invece, non ha questa restrizione (non è un sistema di particelle identiche), e pertanto potrà legarsi sia in un singoletto che in un tripletto di spin. Nel singoletto, l'interazione protone-neutrone è la stessa di protone-protone e neutrone-neutrone, mentre è maggiore nello stato di tripletto (di circa un fattore 2), espressione del fatto che protone e neutrone possono formare uno stato legato (il deutone), mentre protone-protone e neutrone-neutrone no
- **Dipende dallo spin**, per quanto appena visto; ci possono essere poi eventuali contributi di spin-orbita dovuti all'interazione fra lo spin totale e il momento angolare orbitale totale di un sistema di nucleoni
- **Contiene contributi non centrali**, per quanto visto relativamente al momento di dipolo magnetico
- **Deve avere una parte repulsiva** (detta anche *core repulsivo*) **a cortissimo raggio**: abbiamo infatti visto che la densità di materia nel nucleo satura verso un certo valore, e dunque i nucleoni si comportano come “palline”, e non possono “sovrapporsi” l'uno all'altro.

- **Ha un raggio d'azione dell'ordine dei femtometri.** In questo modo, il numero di interazioni “attive” presenti in un nucleo è A ; se ad esempio l'interazione nucleare fosse a lungo raggio, il numero di queste interazioni sarebbe proporzionale $A(A - 1)$ (c'è un ordine di differenza). Infatti, il numero di interazioni sarebbe uguale al numero di tutte le possibili coppie di A nucleoni, pari a:

$$\binom{A}{2} = \frac{A!}{2!(A-2)!} = \frac{A(A-1)(A-2)!}{2(A-2)!} = \frac{1}{2}A(A-1)$$

Ciò è simile a quello che avviene in un fluido: le molecole che lo compongono interagiscono solo con quelle che si trovano entro una certa distanza da esse, e questo ad esempio porta alla “formazione” della tensione superficiale (in breve, perché trasportare una molecola verso la superficie costa del lavoro, in quanto si diminuisce il numero di molecole con le quali interagisce). Vedremo che anche nei nuclei si creeranno effetti di superficie, rilevanti però solo per nuclei piccoli (in quanto proporzionali al quadrato del raggio, al contrario degli effetti “di volume”, proporzionali al suo cubo).

1.5 Stabilità dei nuclei e decadimenti radioattivi

Non possiamo però limitarci a studiare il solo deutone, dobbiamo passare ad analizzare nuclei via via più complicati.

1.5.1 Trizio e ${}^3\text{He}$

Consideriamo dunque il trizio, composto da due neutroni e un protone, e ${}^3\text{He}$, composto da un neutrone e due protoni.

Poiché sono nuclei speculari, per ciò che abbiamo già detto ci aspettiamo che siano uguali, modulo l'interazione coulombiana (nel trizio infatti c'è un'interazione neutrone-neutrone e due protone-neutrone, mentre in ${}^3\text{He}$ c'è una protone-protone e due protone-neutrone).

Le energie di legame di questi due elementi sono (BE sta per “binding energy”):

$$BE(t) = 2m_n + m_p - m(t) = 8.48 \text{ MeV} \quad BE({}^3\text{He}) = 2m_p + m_n - m({}^3\text{He}) = 7.7 \text{ MeV}$$

Se le masse del protone e del neutrone fossero uguali, queste due energie differirebbero solo per il contributo dell'interazione coulombiana, e il trizio risulterebbe il nucleo più stabile fra i due (ammesso che questi due sistemi possano “trasformarsi” l'uno nell'altro). Poiché però $m_p \neq m_n$, accade esattamente il contrario: il trizio, se possibile (e vedremo che lo sarà), cercherà di “trasformarsi” in ${}^3\text{He}$ ⁸.

1.5.2 ${}^4\text{He}$, o particelle α

Il nucleo successivo, ${}^4\text{He}$ (dette anche *particelle α*) ha energia di legame $BE(\alpha) = 28.29 \text{ MeV}$; è estremamente più grande di quelle precedenti: ciò accade per una particolare composizione di effetti di spin e forze nucleari. Pertanto, poiché le particelle α hanno un'elevata energia di legame, sono particolarmente stabili.

Ciò lo si può vedere anche considerando i vari sistemi nei quali si può “trasformare” una particella α , e confrontando le loro energie di legame. Vedremo più avanti che in un nucleo può accadere che un neutrone si “trasformi” in un protone: pertanto si potrebbe avere il processo ${}^4\text{He} \rightarrow {}^4\text{Li}$; tuttavia, ${}^4\text{Li}$ è un nucleo molto “esotico”, con una bassissima energia di legame: si tratta pertanto di un nucleo instabile, e dunque una particella α non potrà “trasformarsi” in esso.

Potremmo dunque vedere se una particella α può scindersi in due deutoni: la possibilità o meno di questa trasformazione sarà data dal confronto fra le energie dei due sistemi, rispetto a quella del sistema non legato (ossia in cui i quattro nucleoni sono liberi). Si ha:

⁸Nota: anche se $BE(t) > BE({}^3\text{He})$, riferendole alle loro soglie ($2m_n + m_p$ e $2m_p + m_n$, rispettivamente) risulta che il trizio è instabile.

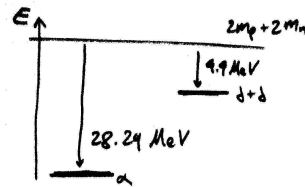


Figura 1.3: Confronto fra le energie dei due sistemi

Poiché l'energia di legame di un deutone è 2.2 MeV, l'energia di legame di un sistema composto da due deutoni sarà 4.4 MeV: pertanto, la “soglia di rottura” della particella α è di circa 24 MeV. Dunque, una particella α non si scinderà mai spontaneamente in due deutoni: lo farà soltanto se le forniamo circa 24 MeV di energia. Il processo inverso (ossia la “fusione” di due deutoni in una particella α) è energeticamente consentito, ma ostacolato da un fatto: per legarsi, i due deutoni devono avvicinarsi a distanze dell'ordine dei femtometri (quelle alle quali diventano rilevanti le interazioni nucleari), ma l'interazione coulombiana fra i due tenderà ad allontanarli (dato che entrambi hanno carica positiva). Si può modellizzare il potenziale d'interazione fra due deutoni in questo modo:

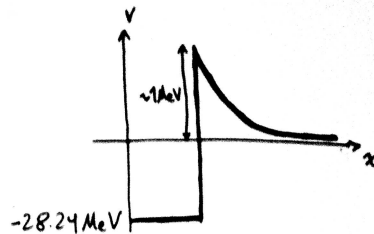


Figura 1.4: Modello di potenziale d'interazione fra deutoni

Pertanto, il processo avverrà se forniamo al sistema circa 1 MeV di energia (ad esempio accelerando uno dei due deutoni).

1.5.3 Nuclei successivi

${}^6\text{Li}$

È composto da tre protoni e tre neutroni, e ha energia di legame $BE({}^6\text{Li}) = 30.5$ MeV: si può vedere che ${}^6\text{Li}$ non può scindersi spontaneamente in una particella α e un deutone (ma, come prima, può avvenire il contrario se si fornisce sufficiente energia al sistema).

${}^7\text{Be}$

È composto da quattro protoni e tre neutroni, e ha energia di legame $BE({}^7\text{Be}) = 37.6$ MeV. Per stabilire se è stabile o meno dobbiamo controllare tutti i possibili canali di scissione⁹. Si può avere:



In entrambi i casi, però, risulta che i processi non possono essere spontanei (il sistema $\alpha + {}^3\text{He}$, ad esempio, ha energia di legame di circa 36 MeV).

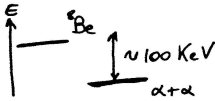
${}^8\text{Be}$

Dunque, perlomeno per sistemi nucleari leggeri, i nuclei tendono ad accrescersi (perché in questo modo diventano sistemi più stabili).

La prima eccezione a questo andamento è ${}^8\text{Be}$: è formato da quattro protoni e quattro neutroni, e ha energia di legame $BE({}^8\text{Be}) = 56.496$ MeV.

⁹Per ora non stiamo considerando eventuali canali di decadimento beta, che vedremo più avanti.

Si potrebbe pensare che si scinda in ${}^6\text{Li} + d$, ma l'energia di legame di questo sistema è 36.4 MeV, e quindi non è spontaneamente realizzabile.



Tuttavia, la composizione di ${}^8\text{Be}$ può suggerire che si possa scindere in due particelle α , ossia ${}^8\text{Be} \rightarrow \alpha + \alpha$. In effetti si ha che l'energia di legame di due particelle α è di 56.6 MeV: pertanto questo fenomeno può avvenire spontaneamente.

Questo fatto, a questo livello della trattazione, è “un caso” (è una conseguenza della particolare forma che l'interazione nucleare assume in questo caso).

Per poter creare elementi più pesanti è dunque necessario trovare un'altra “strada”.

Si può verificare che ${}^9\text{Be}$ è stabile: il neutrone aggiuntivo, infatti, “tiene insieme” le due particelle α , che altrimenti tenderebbero a scindersi. Si tratta di una situazione simile alla formazione di una molecola: il nuovo neutrone viene “condiviso” dalle due particelle α , permettendo (grazie all'interazione forte) di rendere stabile il sistema).

1.6 I decadimenti

È anche possibile considerare trasformazioni di tipo nucleare, ossia nelle quali un sistema nucleare si trasforma in un altro sistema nucleare: ad esempio, ${}^{14}\text{C} \rightarrow {}^{14}\text{N}$. Vedremo che si tratta di fenomeni dovuti anche a un nuovo tipo di interazione, l'*interazione debole*.

Vedremo anche che poiché questo tipo di processo è energeticamente favorito, ha una certa probabilità di accadere. Se E_1 e E_2 sono le energie, rispettivamente, dei sistemi iniziale e finale, questo tipo di processo porterà all'emissione di una quantità di energia pari a $\Delta E = E_1 - E_2$ sotto forma, ad esempio, di radiazione.

Questi fenomeni sono detti *decadimenti*.

La probabilità di un decadimento dipende dalle nature degli stati coinvolti, e dal tipo di decadimento stesso. Quantisticamente, questa probabilità è legata agli elementi di matrice di determinati operatori che permettono la transizione fra i due stati. Pertanto, ogni decadimento ha una propria probabilità, che vedremo essere legata anche ai momenti angolari degli stati fra i quali si transisce e dal momento angolare dell'operatore (legato, come già detto, a quello del campo che causa la transizione).

Ogni processo di questo tipo sarà dunque caratterizzato da una “costante di decadimento” λ , che è sostanzialmente la probabilità che avvenga un decadimento in un tempo infinitesimo.

Considerando un solo nucleo, quindi, non si riesce a dire molto. Se invece prendiamo in esame un sistema di N nuclei (con N molto grande) si può trattare il tutto in modo statistico.

Detta dunque dN la variazione del numero di nuclei in un tempo dt , si avrà $dN = -\lambda N dt$ (il segno negativo è presente perché decadendo il numero di nuclei diminuisce). Dunque:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

ove $N_0 = N(0)$.

Definendo $t_{1/2}$ il *tempo di dimezzamento*, ossia il tempo nel quale decade la metà dei nuclei iniziali:

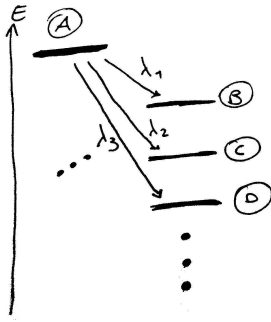
$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

(che ovviamente non dipende da N_0).

La *vita media* τ di un nucleo, invece, è il tempo che mediamente impiega un nucleo a decadere. Si ha:

$$\tau = \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Può accadere che il nostro sistema nucleare abbia la possibilità di decadere in tutta una serie di sistemi, ognuno con una sua probabilità (e quindi caratterizzato da una propria costante di decadimento).



Considerando il sistema ideale (ad esempio se è un “foglio sottile” di materiale, anziché un “blocco massiccio”), ognuno di questi processi di decadimento *non* interferirà con gli altri (ogni nucleo “se ne frega” di tutti gli altri).

In questo caso, la costante di decadimento totale sarà la somma delle costanti dei vari canali di decadimento:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$$

Dunque, ad esempio:

$$\frac{1}{t_{1/2}} = \frac{1}{t_{1/2}^1} + \frac{1}{t_{1/2}^2} + \dots$$

Capitolo 2

Modelli per nuclei medi e pesanti

Ci proponiamo di descrivere sistemi di molti nucleoni, per comprendere meglio le proprietà dei nuclei medi e pesanti.

È necessario introdurre dei modelli perché si tratta di sistemi complicatissimi: ad esempio ^{208}Pb è composto da 208 nucleoni interagenti fra loro tramite l'interazione forte. Risolvere l'equazione di Schrödinger per sistemi del genere è impossibile (oltre che inutile, visto che non riusciremmo a derivarne molte informazioni utili).

L'idea generale per trattare sistemi del genere è quella di elaborare modelli a nucleoni indipendenti: consideriamo l'azione di tutti i nucleoni su ognuno di essi come dovuta ad un "campo medio" (o meglio, a un'interazione efficace, e lo si fa perché finite sono le interazioni alle quali ogni nucleone è soggetto) all'interno del quale i nucleoni si muovono come se fossero fra loro indipendenti.

2.1 Il modello a gas di Fermi

La più semplice ipotesi che possiamo fare riguardo a questo "potenziale medio" è che sia una buca di potenziale. Con questa ipotesi si formula il *modello a gas di Fermi*.

Assumiamo dunque che l'hamiltoniana si possa approssimare come una somma di hamiltoniane (una per ogni nucleone), contenenti oltre al termine cinetico uno dovuto a un potenziale medio non nullo solo su un dominio finito. Questo potenziale avrà più stati (legati o meno), che verranno occupati dai nucleoni. Poiché il nucleo è un sistema di fermioni e l'hamiltoniana è separabile in più termini, l'energia totale del nucleo sarà la somma delle energie di tutti i nucleoni. Allo zero assoluto, dunque, i nuclei occuperanno gli stati del mare di Fermi, ossia tutti i più bassi disponibili, in accordo col principio di esclusione di Pauli; aumentando la temperatura, teoricamente, alcuni di questi potranno occupare stati più elevati.

In realtà, possiamo considerare il nucleo come un mare di Fermi anche per temperature diverse dallo zero assoluto: se infatti T è la temperatura ambiente ($T \sim 300\text{K}$), l'energia cinetica termodinamica kT è piccolissima (dell'ordine del centesimo di eV) rispetto a quelle in gioco nei nuclei (dell'ordine dei MeV). Insomma, quello che accade è che l'energia cinetica termodinamica diventa rilevante solo a temperature elevatissime.

Per quello che riguarda il potenziale medio al quale sono soggetti i nucleoni, possiamo inizialmente pensarlo come una buca (cubica) infinita di potenziale: dovremo dunque risolvere l'equazione di Schrödinger in questa buca, con le solite condizioni al contorno (ossia l'annullamento della funzione d'onda fuori dalla buca).

Ci chiediamo dunque quale sia l'energia di Fermi di questo sistema.

Per farlo, procediamo nel seguente modo: determiniamo la densità di stati in funzione dell'energia e del momento, $\rho(E)$ e $\rho(p)$, per poi ricavare con quest'ultima il momento di Fermi, e quindi l'energia di Fermi.

Determiniamo dunque la densità di stati $\rho(E)$ in funzione dell'energia, ossia il numero di stati per unità di energia e volume. Poiché l'energia di una particella singola nella buca è (supponendo che il lato sia lungo a):

$$E = \frac{h^2}{8ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

con n_x, n_y, n_z positivi, i possibili stati di energia saranno rappresentati da un “reticolo” di passo unitario nel primo ottante dello spazio (n_x, n_y, n_z) .

Poiché l'energia dipende dalla “distanza dall'origine” di questo sistema, le particelle si disporranno su di una “sfera”.

Supponendo gli stati “molto fitti” (per sistemi con molte particelle questo è effettivamente il caso), il numero di stati fra le sfere di raggi n e $n + dn$ (l'8 a denominatore serve proprio perché gli stati si trovano nel primo ottante):

$$dN = \frac{4\pi n^2 dn}{8}$$

Si ha quindi (tenendo conto che $n = \sqrt{\frac{8ma^2}{h^2}E}$):

$$\begin{aligned} \rho(E) = \frac{dN}{dE} &\Rightarrow \rho(E)dE = \frac{\pi}{2}n^2 dn = \frac{\pi}{2}n dn = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{8ma^2}{h^2}E} \frac{4ma^2}{h^2} dE = \pi 2^{5/2} m^{3/2} \underbrace{a^3}_{=V} \frac{1}{h^3} \sqrt{E} dE \\ &\Rightarrow \rho(E)dE = V \frac{\pi 2^{5/2} m^{3/2}}{h^3} \sqrt{E} dE \end{aligned}$$

Considerando anche l'impulso:

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{E} = \frac{p}{\sqrt{2m}} \\ dE = \frac{p}{m} dp \end{cases} \Rightarrow \rho(p)dp = V \frac{4\pi}{h^3} p^2 dp$$

e il numero di stati con impulso fra p e $p + dp$ è:

$$dN = 2\rho(p)dp = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{r_0}{\hbar}\right)^3 A p^2 dp$$

ove r_0 è il raggio del nucleo, e il 2 è la degenerazione dovuta allo spin.

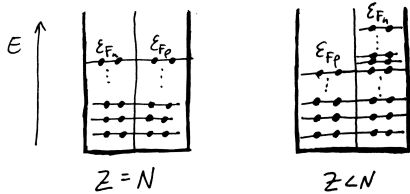
Bisogna anche tenere conto, poi, che il nucleo è composto da protoni e neutroni: insomma, ogni livello è occupato da quattro nucleoni (due protoni e due neutroni, con spin antiparallelo a coppie).

Per i protoni si deve dunque avere:

$$Z = 2 \int_0^{p_{Fp}} \rho(p) dp = \dots = \frac{4}{9\pi} \left(\frac{r_0}{\hbar}\right)^3 A p_{Fp}^3 \Rightarrow p_{Fp} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3}$$

Analogamente, per i neutroni:

$$A - Z = 2 \int_0^{p_{Fn}} \rho(p) dp = \dots = \frac{4}{9\pi} \left(\frac{r_0}{\hbar}\right)^3 A p_{Fn}^3 \Rightarrow p_{Fn} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{1/3}$$



Con $r_0 = 1.25$ fm, per nuclei leggeri con $Z = A/2$ si ha $p_{Fp} = p_{Fn} \simeq 240$ MeV/c e $E_F = p_F^2/2m \simeq 30$ MeV.

Pertanto, se in un nucleo si ha $Z = N$, nel modello del gas di Fermi con buca infinita si avrà che gli stati sono riempiti fino all'energia di Fermi, che risulta di circa 30 MeV. Se invece $Z < N$, l'energia di Fermi relativa ai neutroni risulterà maggiore di

quella dei protoni, e ci saranno più stati occupati dai primi (ad esempio per l'uranio si ha $E_{Fp} \simeq 28$ MeV, mentre $E_{Fn} \simeq 32$ MeV).

Ora, in realtà la buca dovrebbe essere finita, e con una data profondità, tale da rendere conto dell'energia di legame del nucleo. Dividendo questa per A si può determinare l'energia di legame media per nucleone, ossia (approssimativamente) l'energia da fornire al sistema per estrarre un nucleone dal nucleo.

La profondità della buca dovrà essere pari alla somma dell'energia di Fermi (circa 30 MeV) e di quella di legame (sperimentalmente, in genere, pari a circa 10 MeV); infatti, l'ultimo stato occupato deve essere legato e tale da avere quella data energia di legame. Insomma, la profondità della buca deve essere di circa 40 MeV, come

avevamo già stimato.

Si può anche determinare che il momento di Fermi p_F dipende dalla densità di materia all'interno del nucleo:

$$p_F = \rho^{1/3} \left(\frac{3}{2} \pi^2 \right)^{1/3} \hbar$$

con $\rho \simeq 0.16$ nucleoni/fm³ (determinabile sperimentalmente) si ha $p_F \simeq 260$ MeV.

Si ha dunque un accordo sufficientemente buono fra il modello a gas di Fermi e i risultati sperimentali.

2.2 Il modello a goccia di liquido

Abbiamo già accennato in 1.4 al fatto che le interazioni fra i nucleoni assomigliano a quelle fra le molecole di un fluido (sostanzialmente perché sono a corto raggio).

In questo modello consideriamo dunque il nucleo come una “goccia di liquido” di data dimensione. Ci sono anche altre analogie fra le proprietà di un fluido e quelle di un nucleo: ad esempio, la densità di materia è costante all'interno del nucleo, e indipendente dalle sue dimensioni, così come la densità di una goccia di liquido è costante, e indipendente dalle dimensioni della goccia; inoltre, il calore richiesto per far evaporare una frazione fissa della goccia è indipendente dalle proprietà della goccia, così come l'energia di legame media per nucleone è indipendente (all'incirca) dal nucleo.

Studiando l'andamento dell'energia di legame in funzione di A , che questo modello si proporrebbe di spiegare, si possono trarre molte informazioni interessanti. Ad esempio, risulta che questa tende a salire fino a un certo valore (in corrispondenza di Fe), per poi tornare a scendere: questo significa che i nuclei più leggeri del ferro tendono ad accrescersi (perché diventano più stabili), mentre quelli più pesanti tendono a scindersi (sempre per lo stesso motivo).

Si vede poi che, per nuclei leggeri, quelli con A multiplo di 4 hanno energie di legame particolarmente alte, ossia sono molto stabili. Ciò può suggerire che poiché le particelle α sono particolarmente stabili, i nuclei con numero di massa multiplo di 4 tendano ad organizzarsi in “blocchi” fatti proprio da particelle α .

I parametri che entrano in gioco in questo modello, per sua natura, sono quelli che identificano un liquido e lo differenziano dagli altri: ad esempio, la densità, la tensione superficiale e la carica elettrica della goccia di liquido.

Considerando un liquido classico, una goccia carica di liquido si troverà in uno stato un po' più instabile rispetto alla configurazione in cui la goccia non è carica: infatti, l'interazione coulombiana tende a “separare” la goccia in gocce più piccole.

Detto β un generico parametro che quantifica la deformazione della goccia (ad esempio può essere il rapporto fra due semiassi della goccia), si ha:

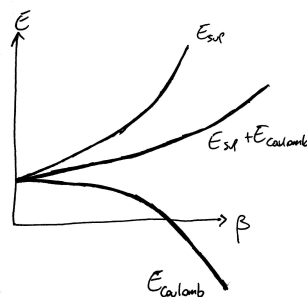


Figura 2.1: Energia in funzione della deformazione

e, al variare dell'energia coulombiana:

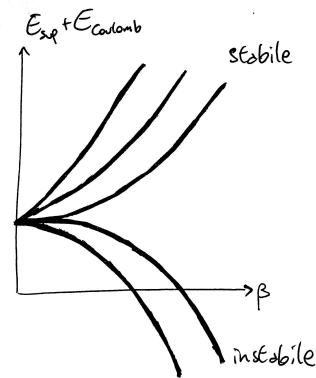


Figura 2.2: Energia totale in funzione della deformazione

Anche per i nuclei avviene qualcosa di simile: per Z minore di 92, la somma di energia di superficie e coulombiana è tale da rendere il sistema stabile, mentre oltre $Z = 92$ i nuclei non sono più stabili.

2.2.1 Formula semi-empirica di massa

Ci proponiamo dunque di determinare una formula, detta *formula semi-empirica di massa*, che permetta di ricavare l'energia di legame in funzione di Z , A e dunque N . Come vedremo, oltre ai termini di volume, superficie e interazione coulombiana, dovremo considerare altri due contributi, detti *di simmetria* e *di accoppiamento*. Bisogna poi riuscire a spiegare anche perché la tabella degli elementi¹ non è completamente riempita: in particolare, bisogna poter spiegare perché gli elementi stabili si trovino in una determinata zona, detta *valle di stabilità*. Vedremo che questo è dovuto sì a motivazioni energetiche, ma anche alla possibilità di decadimenti di tipo β .

Dunque, i vari contributi da tenere in conto sono:

Termine di volume: è dovuto alla saturazione della massa, dato che le interazioni fra nucleoni sono a corto raggio. Proprio perché questo raggio d'interazione è finito, l'energia di volume *non* sarà proporzionale al numero di coppie nucleone-nucleone presenti nel nucleo (ossia A^2), ma a quello dei singoli nucleoni (ossia A). Pertanto, il primo termine presente in questa formula di massa dovrà contenere un termine lineare in A :

$$BE = a_V A + \dots$$

ove a_V è una costante dipendente dalle proprietà dell'interazione fra nucleoni, e ci riserviamo di ricavarla empiricamente dai dati sperimentali.

Dunque, il contributo all'energia di legame media BE/A dovuto al termine di volume è costante, e ad esso dovremo aggiungere i successivi termini correttivi.

Termine di superficie: nei liquidi classici “nasce” dalla presenza della tensione superficiale, e in modo analogo anche per i nuclei: un nucleone vicino alla superficie interagisce con un numero minore di nucleoni rispetto a quelli che si trovano più vicini al centro del sistema.

Dobbiamo dunque sottrarre a BE un termine proporzionale alla superficie del nucleo, che sarà proporzionale ad $A^{2/3}$ (perché $S \propto R^2$, e $R \propto A^{1/3}$). Dunque:

$$BE = a_V A - a_S A^{2/3} + \dots$$

Il termine di superficie in BE/A , quindi, sarà proporzionale a $A^{-1/3}$, e pertanto sarà sempre meno importante al crescere del nucleo (come avevamo già intuito).

Termine coulombiano: è l'energia legata alla distribuzione di carica all'interno del nucleo.

A priori non è detto che la carica sia uniformemente distribuita nel nucleo: potremmo infatti supporre

¹Si tratta di una tabella, con N in ascissa e Z in ordinata, nella quale ogni casella viene riempita se corrisponde ad un elemento esistente.

che, in analogia a quello che succede in un conduttore, i protoni tendano a situarsi sulla superficie del nucleo. Sperimentalmente, però (lo si vede con processi d'urto fatti con elettroni ad alte energie, come già accennato), risulta che effettivamente la carica è distribuita uniformemente all'interno del nucleo, e la distribuzione di carica in funzione della distanza dal centro del nucleo ha sostanzialmente lo stesso aspetto della distribuzione di massa.

Pertanto, l'energia elettrostatica del nucleo è quella di una distribuzione sferica uniforme di carica, ossia:

$$E_{\text{Coulomb}} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

e poiché $R = r_0 A^{1/3}$, con r_0 raggio dei nucleoni, si avrà:

$$BE = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

ove $a_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} \approx 0.7 \text{ MeV}$. Per via della presenza di Z^2 , il contributo coulombiano diventa sempre più importante al crescere del nucleo.

Termine di simmetria: deriva dal fatto che il nucleo è un sistema misto composto da due categorie di oggetti (protoni e neutroni).

Osservando la tabella degli elementi, si nota che la valle di stabilità giace sulla diagonale della tabella fino al ^{40}Ca , che è l'ultimo nucleo stabile con $N = Z$: dopodiché, la valle si “piega” verso la zona $N > Z$. Ciò accade perché il termine coulombiano diventa sempre più importante, e quindi sono necessari molti neutroni all'interno del nucleo per renderlo stabile (ossia, sfruttare l'interazione forte esercitata dai neutroni aggiuntivi per bilanciare la repulsione reciproca dei protoni).

La presenza del termine di simmetria è dovuta sostanzialmente a due ragioni.

Per quanto riguarda la prima, finora noi abbiamo sempre trattato protoni e neutroni come particelle identiche, ma sappiamo che le interazioni protone-protone e neutrone-neutrone non sono uguali a quella protone-neutrone. In particolare, l'interazione protone-neutrone è più forte delle altre; supponiamo ad esempio che sia il doppio delle altre due (ossia che, detti v_{pn} il potenziale dell'interazione protone-neutrone e $v_{pp} = v_{nn} = v$ quello delle interazioni protone-protone e neutrone-neutrone, allora $v_{pn} = 2v$), e che un nucleo abbia numero atomico Z e di massa A . Ci chiediamo: qual è la configurazione più stabile del sistema?

Dobbiamo considerare termini dovuti alle interazioni neutrone-neutrone, protone-protone e protone-neutrone nel nucleo. Si determina che la configurazione più stabile (ossia il minimo dell'energia) è quella con $N = Z$; in particolare, si determina che il termine che contribuisce all'energia di legame è:

$$\frac{v}{2} \left[3A - \frac{(N - Z)^2}{A} \right]$$

Il primo contributo verrà “inglobato” nel termine di volume perché proporzionale ad A , mentre il secondo è detto propriamente *termine di simmetria*, ed è proprio quello che ha un minimo per $N = Z$.

Se dunque non fosse presente l'interazione coulombiana, la valle di stabilità giacerebbe sempre sulla diagonale $Z = N$ della tabella degli elementi.

La seconda ragione che giustifica la presenza del termine di simmetria è legata al principio di esclusione di Pauli: il nucleo è infatti un sistema di fermioni, e quindi la sua funzione d'onda dev'essere antisimmetrica rispetto allo scambio di due particelle. Nel modello a buca di potenziale, protoni e neutroni si muovono nello stesso “potenziale medio”, e i livelli di energia saranno gli stessi per protoni e neutroni, se $N = Z$. Se invece $Z < N$ alcuni neutroni andranno ad occupare livelli di energia più alti. Supponiamo infatti di avere un nucleo con $N = Z$ e di poter “trasformare” dei protoni in neutroni: per il principio di esclusione di Pauli questi nuovi neutroni potranno occupare solo gli stati liberi più alti, e dunque dovremo fornire loro dell'energia per poterli occupare. In altre parole, trasformare protoni in neutroni ha un costo energetico, che risulta sempre più grande al crescere del numero di protoni “trasformati”, e si determina

che è proporzionale a $(N - Z)^2$. Pertanto, il sistema con energia minima sarà proprio quello con $N = Z$. Ora, poiché i nucleoni sono fermioni e si muovono “liberamente” nel nucleo, cosa accade nel caso in cui due di essi si urtino? Uno dei due nucleoni potrebbe “saltare” a un livello più alto: tuttavia, questo può risultare molto distante dal livello in cui si trova la particella che ha subito l’urto, e quindi questa può non acquisire abbastanza energia per effettuare la transizione. Ciò che accade, dunque, è che i nucleoni non possono scontrarsi, ovvero si muovono “ignorando” la presenza di tutti gli altri nucleoni.

Termine di accoppiamento: per ogni dato elemento, non esiste un solo isotopo stabile. Sperimentalmente, in generale i sistemi pari-pari (ossia quelli con un numero pari di protoni e di neutroni) sembrano essere favoriti rispetto ai sistemi pari-dispari e ancora di più rispetto a quelli dispari-dispari (nel senso che la stragrande maggioranza degli isotopi stabili è di tipo pari-pari, mentre pari-dispari e ancora di più dispari-dispari sono più rari)².

Nella formula semi-empirica di massa dovremo dunque tener conto di un termine che implementi questa caratteristica dei nuclei. Si tratta di un termine che normalmente viene parametrizzato associando al nucleo un’energia detta di *accoppiamento* E_{pairing} (è cioè l’energia guadagnata quando i nucleoni si appaiano) pari a +12 MeV per sistemi pari-pari, 0 MeV per sistemi pari-dispari e -12 MeV per sistemi dispari-dispari.

Per A dispari, ad esempio $A = 121$, l’energia di legame in funzione di Z ha il seguente andamento:

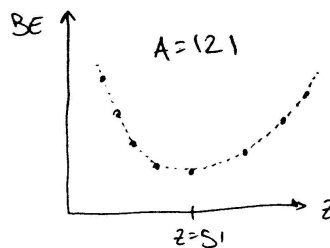


Figura 2.3: Andamento dell’energia di legame in funzione di Z per $A = 121$

e i punti giacciono su una parabola. Dunque, lungo la retta $A =$ dispari della tabella degli elementi si trova *un solo* elemento stabile.

Per A pari, ad esempio $A = 122$, si ha invece:

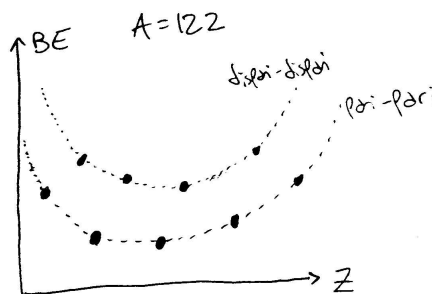


Figura 2.4: Andamento dell’energia di legame in funzione di Z per $A = 122$

Tutti i sistemi che giacciono sulla “parabola bassa” sono stabili³, e dunque per A fissato esistono più elementi stabili al variare di Z .

Un esempio di nucleo dispari-dispari stabile (nel senso di poco instabile, perché comunque è instabile) è ^{40}K (nel quale $Z = 19$, $N = 21$). Da un punto di vista energetico la situazione è:

²Notiamo anche che i sistemi pari-dispari restano sempre tali anche se avviene un decadimento, sia di tipo α che β .

³Infatti, non possono decadere “in un colpo solo” nello stato con Z pari più basso, perché prima si trova uno stato con Z dispari, che ha energia più alta. In realtà, però, esistono processi come il doppio decadimento β , nel quale appunto un sistema può decadere facendo “due passi in un colpo solo”. Tuttavia, questo decadimento è incredibilmente poco probabile, e pertanto non lo consideriamo.

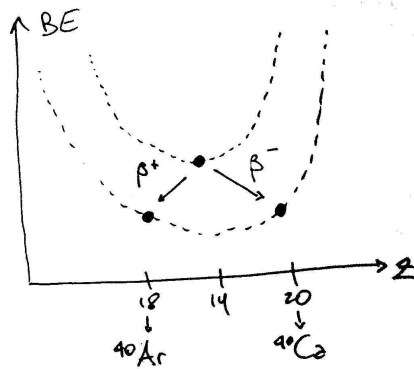


Figura 2.5: Andamento dell'energia di legame in funzione di Z per $A = 40$

e il sistema può decadere sia in ^{40}Ar che ^{40}Ca , dato che ^{40}K è uno dei pochi elementi che può decadere sia con un processo di tipo β^+ che di tipo β^- .

Insomma, per concludere si ha:

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{symm}} \frac{(N-Z)^2}{A} + E_{\text{pairing}}$$

Poiché però stiamo trattando sistemi molto complessi, può darsi che ci sia qualche falla qua e là nel modello. Ciò che questo modello prevede, una volta determinate le varie costanti, è:

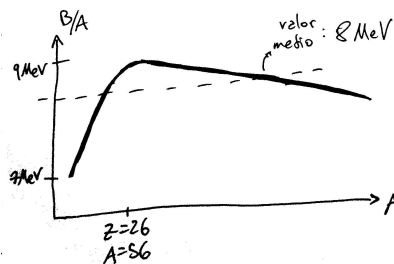


Figura 2.6: Previsione del modello

ove il valore medio risulta di circa 8 MeV.

Sperimentalmente, questa curva ha un buon accordo con i dati, ma di tanto in tanto ci sono degli elementi con un'energia di legame maggiore di quella prevista, a ben determinati Z o N :

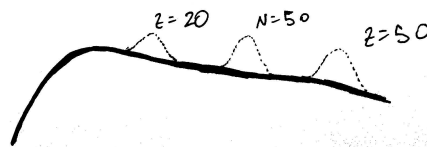


Figura 2.7: Numeri magici

Queste “deviazioni” dal modello avvengono in corrispondenza dei cosiddetti *numeri magici*:

$$Z, N = 2, 8, 20, 50, 82, 126, \dots$$

In generale, nuclei con questi valori di Z o N sono più legati degli altri, e sono detti *nuclei magici*. Se questi hanno sia N che Z uguale a un numero magico sono particolarmente stabili, e sono detti *nuclei doppiamente magici*. Alcuni di questi sono:



2.3 Modello a shell

Mediamente, dunque, i nuclei sembrano soddisfare il modello a goccia di liquido e la formula semi-empirica, ma con alcune peculiari deviazioni da questo comportamento, con elementi particolarmente legati.

Questo fatto ricorda un po' l'esistenza dei gas nobili (per determinati valori di Z esistono elementi particolarmente stabili, perché in corrispondenza di questi Z determinate shell elettroniche vengono "chiuse").

Seguendo questo parallelismo si potrebbe pensare che i nucleoni si muovano su orbitali fra loro indipendenti. È questa l'idea fondamentale del *modello a shell*, che ora analizzeremo.

In questo modello pensiamo l'hamiltoniana del sistema come $H = T + V$, ove T è il contributo cinetico e V quello potenziale. In generale:

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

ove V_{ij} è il potenziale d'interazione fra le particelle i e j . Approssimiamo il termine di energia potenziale con un potenziale medio: pensiamo il sistema come soggetto a un potenziale medio u all'interno del quale i nuclei sono indipendenti. Dunque:

$$H \approx \sum_i T_i + \sum_i u(\vec{r}_i) = \sum_i (T_i + u_i)$$

Poiché l'hamiltoniano è separabile, la funzione d'onda del sistema sarà fattorizzabile (con l'opportuna antisimmetrizzazione):

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A, \text{spin}, \text{isospin}) = \prod_i \Phi_n(\vec{r}_i)$$

ove Φ_n sono gli autostati di $T + u$. Si avrà pertanto:

$$(T + u)\Phi_n(\vec{r}) = E_n \Phi_n(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad H\Psi_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \varepsilon_k \Psi_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$$

ove k è l'indice che indica il numero d'ordine associato agli autostati legati ($k \in \{n_1, \dots, n_A\}$), e $\varepsilon = \sum_i E_i$ (l'energia totale è la somma delle energie delle particelle singole).

Si ha dunque:

$$H' - H = \Delta V$$

ove $H = T - V$ e H' è l'hamiltoniana approssimata.

Non abbiamo però ancora detto nulla sulla forma di u .

2.3.1 Potenziale armonico

Potremmo ipotizzare, ad esempio, che il sistema sia soggetto a un potenziale armonico.

Risolviamo dunque il problema con un solo nucleone; dopodiché, si tratterà semplicemente di riempire gli stati che determineremo con altri nucleoni.

Consideriamo dunque:

$$H = T - \frac{1}{2}kr^2$$

ossia un potenziale armonico isotropo.

Come noto, in una dimensione (ossia $H = T - \frac{1}{2}kx^2$) le autofunzioni dell'hamiltoniana hanno come autovalori $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ con n intero (zero incluso).

Per il problema tridimensionale, invece, esprimendo le autofunzioni Φ di H in coordinate cartesiane, l'hamiltoniana risulterà separabile:

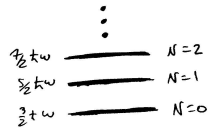
$$H = H_x + H_y + H_z$$

e dunque la funzione d'onda sarà fattorizzabile:

$$\Phi_k(x, y, z) = \Phi_{n_x}(x)\Phi_{n_y}(y)\Phi_{n_z}(z)$$

con $k = \{n_x, n_y, n_z\}$. L'energia del sistema è:

$$E_k = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \underbrace{(n_x + n_y + n_z)}_N \hbar\omega$$



Dunque, anche in tre dimensioni lo spettro energetico è composto da stati equispaziati a passi di $\hbar\omega$.

Questi stati, in generale, saranno degeneri: si ha infatti $N = 2n + L$, ove n è il numero di nodi della funzione (escluse l'origine e l'infinito), e L è il momento angolare totale. Si possono dunque avere più coppie (n, L) che portano allo stesso N , e dunque si possono avere più stati con la stessa energia. Infatti:

$$N = 0 \longrightarrow n = 0, L = 0 \quad N = 1 \longrightarrow n = 0, L = 1 \quad N = 2 \longrightarrow n = 0, L = 2 \text{ oppure } n = 1, L = 0$$

$$N = 3 \longrightarrow n = 0, L = 3 \text{ oppure } n = 1, L = 1$$

eccetera.

Tradizionalmente, in fisica nucleare gli stati con diverso momento angolare vengono indicati con lettere minuscole:

$$L = 0 \rightarrow s \quad L = 1 \rightarrow p \quad L = 2 \rightarrow d \quad L = 3 \rightarrow f \quad L = 4 \rightarrow g \quad L = 5 \rightarrow h \quad \dots$$

(a partire da $L = 3$ si segue l'ordine alfabetico). Pertanto, ogni stato si indicherà con la sua lettera minuscola e il suo valore di n ; ad esempio $0s$ corrisponde a uno stato con $n = 0$ e $L = 0$, mentre $1s$ corrisponde a $n = 1$ e $L = 0$.

Tenendo conto anche dello spin, la degenerazione complessiva dei livelli è:

$$N = 0 \rightarrow 2 \quad N = 1 \rightarrow 6 \quad N = 2 \rightarrow 12 \quad N = 3 \rightarrow 20$$

Infatti, ogni livello con un dato valore di L è $2L + 1$ volte degenero, e tenendo conto dello spin la degenerazione diventa $2(2L + 1)$. Pertanto, la degenerazione complessiva in N dei livelli è:

$$N = 0 \longrightarrow 2(0 + 1) = 2 \quad N = 1 \longrightarrow 2(2 + 1) = 6 \quad N = 2 \longrightarrow 2(4 + 1) + 2(0 + 1) = 12$$

$$N = 3 \longrightarrow 2(6 + 1) + 2(2 + 1) = 20$$

e così via.

Pertanto, i primi "orbitali" si "chiudono" (ossia vengono completamente riempiti) con 2, $2+6=8$ e $12+8=20$ nucleoni; si tratta proprio dei primi tre numeri magici. Tuttavia, il quarto livello viene riempito con $20+20=40$ nucleoni, che non è un numero magico (dovrebbe essere 50).

Siamo dunque sulla giusta strada, ma evidentemente è sbagliato l'approccio, ossia il potenziale armonico non è quello ottimale (è troppo semplice per descrivere un sistema così complicato).

2.3.2 Potenziale di Woods-Saxon

Dobbiamo dunque pensare a un diverso potenziale $V(r)$.

Consideriamo la densità di massa all'interno del nucleo. Questa può essere modellizzata come:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

ove a è la "diffusività" della distribuzione di materia (pari a circa mezzo fm), e R è il raggio del nucleo.

Potremmo dunque supporre che $V(r)$ abbia la stessa forma, ossia:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

detto *potenziale di Woods-Saxon*; graficamente:

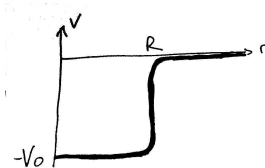


Figura 2.8: Potenziale di Woods-Saxon

Dobbiamo dunque determinare gli stati legati di questo potenziale. Il problema è che l'equazione agli autovalori per il potenziale di Woods-Saxon non è risolvibile analiticamente, ma solo numericamente. Ciò che si determina è che le sequenze di stati sono simili a quelle dell'oscillatore armonico, per gli stati più bassi. In particolare:

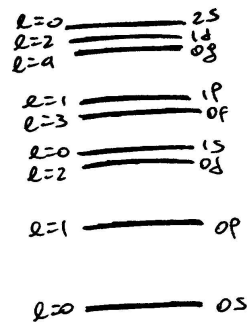


Figura 2.9: Livelli di energia del potenziale di Woods-Saxon

ove la numerazione delle shell è arbitraria (non c'è più un numero d'ordine come nel caso precedente). Come si vede, la degenerazione degli stati con $N = 2, N = 3, N = 4$ è stata rimossa dal potenziale di Woods-Saxon. Rifacendo il conto di prima, si determina che le varie "shell" si chiudono a 2, 8, 20, 40 e 70 nucleoni. Il problema, dunque, non è ancora risolto.

Ora, nel caso atomico gli elettroni si muovono nel potenziale coulombiano, ma gli effetti relativistici fanno sì che si debbano considerare termini di interazione spin-orbita. Assumiamo dunque che anche il nostro potenziale nucleare contenga termini di interazione spin-orbita:

$$H = T + V(r) + V_{SP} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

ove V_{SP} dipende dall'accoppiamento del momento angolare con lo spin (ossia dall'orientazione relativa fra \vec{L} e \vec{S}). Questo termine di interazione spin-orbita fa sì che H sia tale che:

$$[H, L^2] = 0 \quad [H, L_z] \neq 0$$

ossia, il potenziale totale non è più centrale.

Le autofunzioni non saranno quindi più caratterizzate dai numeri quantici n, ℓ, m_ℓ perché m_ℓ non è più un buon numero quantico. Quello che fa il termine spin-orbita è rendere gli autostati autostati di J^2 e J_z , ove:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad [H, J^2] = [H, J_z] = 0$$

e pertanto gli autostati saranno caratterizzati dai numeri quantici n, ℓ, s, j e m_j .

Promemoria: Dette $|\ell, m_\ell\rangle$ le autofunzioni di L^2 e L_z e $|s, m_s\rangle$ quelle di S^2 e S_z , si ha che il prodotto $|\ell, m_\ell\rangle |s, m_s\rangle$ vive nello spazio del momento angolare totale. Supponiamo $\ell = 3$ e $s = 1/2$; allora lo spazio di $|\ell, m_\ell\rangle$ è a 7 dimensioni, mentre quello di $|s, m_s\rangle$ è bidimensionale, e pertanto lo spazio prodotto è a 14 dimensioni. Il problema è che $|\ell, m_\ell\rangle |s, m_s\rangle$ non sono autostati di J^2 e J_z , ma una loro combinazione lineare (sono comunque una base). Dunque:

$$|j, m_j\rangle = \sum_{\ell, s} C_{\ell s} |\ell, m_\ell\rangle |s, m_s\rangle$$

col vincolo che $m_j = m_\ell + m_s$, e i $C_{\ell s}$ sono i *coefficienti di Clebsch-Gordan*. Questo fa sì che, in generale, accoppiando due momenti angolari ℓ_1 e ℓ_2 si avrà $|\ell_1 - \ell_2| < \ell_{TOT} < \ell_1 + \ell_2$.

Nel caso $\ell = 3, s = 1/2$, si avrà $j = 5/2$ o $j = 7/2$. Dunque:

$$\text{————— } \ell=3, s=\frac{1}{2} \rightsquigarrow \text{ "ingrandendo" la base } \rightsquigarrow \text{————— } \begin{matrix} j=5/2 \\ j=7/2 \end{matrix}$$

Quello che fa il termine di spin-orbita è di separare i livelli $j = 5/2, j = 7/2$ che finora erano degeneri.

Risolviamo dunque l'equazione agli autovalori del nuovo hamiltoniano con tecniche perturbative. In particolare, se $H = H_0 + \Delta V$, con $H_0 \varphi_n = E_n \varphi_n$ (ossia φ_n e E_n sono rispettivamente le autofunzioni e gli autovalori dell'hamiltoniano imperturbato), si ha:

$$E'_n = E_n + \frac{\langle \varphi_n | \Delta V | \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle}$$

Nel nostro caso, dette $\Phi_{\ell,s}(r)\chi$ le autofunzioni del potenziale di Woods-Saxon (con χ le funzioni d'onda di spin):

$$E'_n = E_n + \frac{\langle \Phi_{\ell,s}(r)\chi | V_{SP}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} | \Phi_{\ell,s}(r)\chi \rangle}{\langle \Phi_{\ell,s}(r)\chi | \Phi_{\ell,s}(r)\chi \rangle}$$

In questa base, però, non sappiamo fare il conto. Passando alla base di autostati di J^2 e J_z :

$$E'_n = E_n + \frac{\langle \varphi_{\ell,s,j,m_j}(r)\chi | V_{SP}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} | \varphi_{\ell,s,j,m_j}(r)\chi \rangle}{\langle \varphi_{\ell,s,j,m_j}(r)\chi | \varphi_{\ell,s,j,m_j}(r)\chi \rangle}$$

Si ha:

$$\langle \varphi_{\ell,s,j,m_j}(r)\chi | V_{SP}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} | \varphi_{\ell,s,j,m_j}(r)\chi \rangle = \langle \varphi_{\ell}(r) | V_{SP} | \varphi_{\ell}(r) \rangle \langle \ell s j m_j | \vec{L} \cdot \vec{S} | \ell s j m_j \rangle$$

con $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$. Poiché $S = 1/2$, $J = L + 1/2$ oppure $J = L - 1/2$.

Se $J = L + 1/2$, si avrà:

$$\langle \ell s j m_j | \vec{L} \cdot \vec{S} | \ell s j m_j \rangle = \frac{(L + \frac{1}{2})(L + \frac{3}{2}) - L(L + 1) - \frac{3}{4}}{2} = \frac{L}{2}$$

Se invece $J = L - 1/2$:

$$\langle \ell s j m_j | \vec{L} \cdot \vec{S} | \ell s j m_j \rangle = \frac{(L - \frac{1}{2})(L + \frac{1}{2}) - L(L + 1) - \frac{3}{4}}{2} = -\frac{L + 1}{2}$$

Pertanto, indipendentemente da $V_{SP}(r)$, i due stati verranno separati, e l'entità della separazione è proporzionale a L . Scegliamo come convenzione che gli stati che vengono "spostati verso il basso" siano quelli con splitting positivo.

Ciò che dunque accade è che per livelli alti (ad esempio quelli a partire dalla terza shell in poi) lo splitting sarà talmente grande da diventare compatibile con le distanze fra le varie shell, riorganizzando i livelli di energia (si parla spesso di *livelli intrusi*). In particolare:

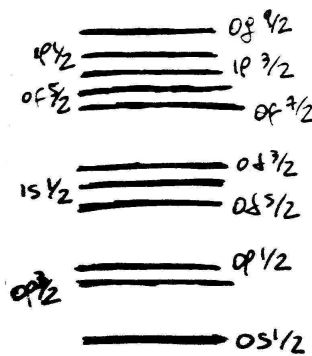


Figura 2.10: Livelli di energia del potenziale di Woods-Saxon con il termine d'interazione spin-orbita

Dunque, il livello $0g9/2$ si è avvicinato al livello precedente ($1p1/2$), entrando a far parte della quarta shell. Il livello $0g9/2$ è occupato da 10 nucleoni, e pertanto la "chiusura" della terza shell non avverrà più a 40, bensì a 50 nucleoni, che era esattamente quello che volevamo accadesse.

Analogamente, la chiusura a 70 nucleoni del livello successivo (la quarta shell) ora avviene a 82 perché il livello $0h11/2$ si è avvicinato al quarto gruppo, ed è occupato da 12 nucleoni.

L'inserimento del termine di spin-orbita, dunque, rende ben conto della disposizione dei numeri magici.

2.3.3 Generalizzazione a più nucleoni

Accettando dunque che i corretti livelli di particella singola siano caratterizzati dai buoni numeri quantici ℓ , s , j e m_j , vediamo cosa accade se invece di un singolo nucleone riempiamo questi stati con molte particelle.

Supponiamo ad esempio di avere due particelle in uno stato con momento angolare j ; il momento angolare totale dovrebbe essere $J = 2j$ e $M_J = 2j, 2j - 1, \dots, -2j$. Non stiamo però tenendo conto del principio di esclusione di Pauli. Consideriamo dunque due particelle in uno stato con $j = 7/2$, e una di esse con $m_j = 7/2$; allora, il massimo M_J ottenibile è $7/2 + 5/2 = 6$: non si può insomma avere $J = 7$, ma dovrà necessariamente essere $J = 6$.

Il vincolo dell'antisimmetria della funzione d'onda complessiva, insomma, pone restrizioni al momento angolare totale di un sistema di particelle su uno stesso livello. Se ad esempio supponiamo di riempire completamente il livello che stiamo considerando, si avrà che ci possiamo "mettere" 8 particelle; ci chiediamo: quanto vale il momento angolare totale di quest'insieme di particelle? Per via del principio di esclusione di Pauli, le particelle occuperanno tutti gli stati disponibili, da quello con spin $7/2$ a quello con spin $-7/2$: pertanto, la somma di tutti i momenti angolari è zero. Insomma, "chiudendo" completamente un livello di particella singola, il momento angolare totale della shell è necessariamente nullo.

Supponiamo dunque di avere un sistema di molti nucleoni, che occupano completamente una serie di livelli ma ne lasciano "scoperto" uno. Ad esempio, consideriamo ^{17}O : ha $Z = 8$ e $N = 9$; in base a quanto detto, i nucleoni occupano i seguenti stati:

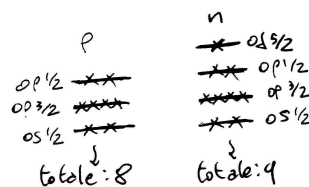


Figura 2.11: Situazione considerata per ^{17}O

Quale sarà il momento angolare totale del sistema? In questo schema, 16 oggetti (tutti i nucleoni tranne il neutrone in $0d5/2$) danno contributo nullo al momento angolare totale: è solo l'ultimo neutrone a determinare il momento angolare totale di ^{17}O .

Ci aspettiamo dunque che nello stato fondamentale ^{17}O abbia spin $5/2$.

Ora, questo sistema di 17 oggetti è a simmetria sferica, dunque oltre ad avere un buon valore di momento angolare dovrà anche avere parità definita. Dobbiamo dunque determinare la parità dei livelli, che andrà come $(-1)^\ell$:

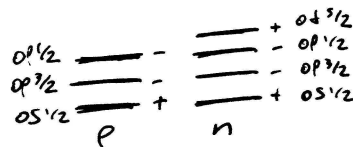


Figura 2.12: Parità del ^{17}O

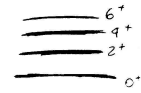
La parità totale del sistema sarà il prodotto di tutte le parità: poiché in ogni livello c'è un numero pari di particelle, la parità di un livello chiuso sarà sempre positiva, e quindi la parità complessiva di ^{17}O sarà determinata da quella del neutrone in $0d5/2$, che è positiva.

Pertanto, lo stato fondamentale di ^{17}O è $5/2^+$.

Interazione residua

Per quanto abbiamo visto, ci aspettiamo che i livelli energetici nel modello a shell siano degeneri in J ; sperimentalmente, però, questa degenerazione risulta rimossa.

Ciò è dovuto al fatto che c'è un'interazione residua fra i nucleoni, della quale non stiamo tenendo conto, ma che invece è presente⁴.



Il modello a shell, dunque, risulta non più del tutto affidabile per sistemi con più di un nucleone.

Considerando i risultati che abbiamo già visto, quest'interazione residua ΔV sarà attrattiva e tale da favorire sistemi con spin totale nullo. Ciò può anche essere interpretato in modo semi-classico: se ad esempio un sistema di due nucleoni ha spin totale nullo, ciò significa che le due particelle orbitano in “versi opposti”, e ciò è energeticamente “favorito” perché questi due nucleoni “si incontreranno spesso”; se lo spin totale non fosse nullo, infatti, i due nucleoni dovrebbero orbitare nello stesso verso, e dunque tenderebbero a rimanere sempre alla stessa distanza fra loro, quando invece “vorrebbero attrarsi”.

Supponiamo ad esempio che l'interazione residua sia a raggio il più corto possibile, ovvero supponiamo $\Delta V = -V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, ove \vec{r}_1 e \vec{r}_2 sono le posizioni dei due nucleoni. Considerandola come un'interazione residua piccola, possiamo sfruttare la teoria delle perturbazioni per determinare la variazione di energia ΔE indotta da questo termine come:

$$\Delta E = \langle \varphi(r_1)\varphi(r_2) | \Delta V | \varphi(r_1)\varphi(r_2) \rangle$$

Si determina che ΔE è massima per $J = 0$, e decresce al crescere di J ; dunque, una semplice interazione di tipo delta di Dirac è in grado di spiegare perché singole coppie di nucleoni preferiscono accoppiarsi a spin totale nullo.

Perciò, tutti i nuclei pari-pari avranno stato fondamentale con spin nullo, e saranno quindi energeticamente favoriti.

⁴Quest'interazione è “contenuta” nel termine di accoppiamento della formula semi-empirica di massa.

Capitolo 3

I decadimenti

3.1 Introduzione

Esistono processi nei quali i nuclei possono cambiare stato, ossia i *decadimenti*; i principali decadimenti, che noi studieremo, sono quelli di tipo α , β e γ . Il nome di questi tre decadimenti è dovuto al tipo di radiazione che viene emessa nel processo (rispettivamente, particelle α , elettroni o radiazione elettromagnetica).

Questi tre tipi di decadimento sono completamente indipendenti fra loro: all'interno di una stessa sequenza di decadimento si può avere una combinazione arbitraria di processi α , β e γ ; insomma, non è vero che uno stesso elemento può decadere solo α , β o γ .

Ad esempio, ^{238}U decade α in ^{234}Th , che a sua volta decade β^- in ^{234}Pa , il quale ancora decade in stati eccitati di ^{234}U , i quali decadono poi nello stato fondamentale emettendo radiazione γ .

Teniamo a mente poi che esistono altri tipi di decadimenti, detti *esotici* perché molto più rari. In un tipo di decadimento esotico, ad esempio, la “particella” emessa è un nucleo di ^{14}C (ad esempio nel processo $^{223}\text{Ra} \rightarrow ^{209}\text{Pb} + ^{14}\text{C}$). In altri decadimenti esotici vengono emessi protoni, e questo tipo di processi avviene in genere in sistemi “troppo ricchi” di protoni (ancora più raramente possono essere emessi due protoni “in un colpo solo”).

3.2 Decadimenti α

3.2.1 Generalità

Derivano prevalentemente da nuclei pesanti: con essi vengono emesse dal nucleo particelle α , con la probabilità di decadimento che dipende in modo approssimativamente esponenziale dall'energia cinetica della particella emessa (ossia è molto più probabile che vengano emesse particelle con molta energia, ci ritorneremo). Le particelle α irradiate hanno energie monocromatiche, o con poche righe discrete. Si tratta dunque di un processo a due corpi, e non a più oggetti¹.

L'energia cinetica delle particelle α emesse è generalmente compresa fra i 4 e i 9 MeV. Isotopi di uno stesso elemento, poi, possono avere comportamenti completamente diversi al variare di N , perché anche una piccola variazione nell'energia cinetica della particella α emessa può portare a enormi differenze nella vita media dell'elemento che decade, ossia nella probabilità di emissione. Ad esempio, ^{232}Th emette particelle α con energia cinetica di 4.08 MeV, mentre l'energia di quelle emesse da ^{218}Th è di 9.85 MeV; risulta che il tempo di dimezzamento del ^{232}Th è di $1.4 \cdot 10^{10}$ anni, mentre quello del ^{218}Th è di 10^{-7} secondi (ci sono 24 ordini di grandezza di differenza!!!).

Ovviamente, per la conservazione dell'energia si avrà che il nucleo e la particella α si ripartiscono l'energia in modo inversamente proporzionale alle loro masse; pertanto, maggiore è A e più la particella α tenderà a “prendersi” tutta l'energia cinetica.

¹ Infatti, per la conservazione dell'impulso e dell'energia, la particella α e il nucleo figlio si spartiranno energia e momento in modo ben preciso, e inversamente proporzionale alle loro masse. Se la reazione fosse a più corpi, i prodotti di reazione potrebbero essere emessi con infinite configurazioni possibili per quanto riguarda i singoli impulsi (sempre compatibilmente con la conservazione dell'impulso totale), e dunque lo spettro risultante sarebbe continuo.

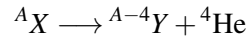
3.2.2 Decadimenti spontanei e stimolati

Come tutti i processi di decadimento, ne esistono di spontanei e non. Ovviamente, se un decadimento è spontaneo allora il sistema composto da nucleo finale e particella α avrà energia minore di quello iniziale.

I decadimenti non spontanei possono avvenire, al solito, se un nucleo viene eccitato; in un processo d'urto, per esempio, se avviene una fusione il sistema finale sarà in uno stato eccitato², che potrà decadere sia α che γ , a seconda dei casi.

Un decadimento α , se spontaneamente possibile, sarà caratterizzato da una determinata probabilità, fissata dalle caratteristiche del sistema e della meccanica quantistica che ci sta dietro.

Il *Q-valore* di una reazione è in generale definito come la differenza fra la somma delle masse iniziali e la somma delle masse finali. Se ad esempio un decadimento α è del tipo:



allora $Q = -\Delta M = M_X - M_Y - M_\alpha$. Affinché il processo sia spontaneo bisogna che $Q > 0$; supponendo che X sia composto da Z protoni e N neutroni, si ha:

$$\begin{aligned} Q = Zm_p + Nm_n - A \cdot BE_X - (Z-2)m_p - (N-2)m_n + (A-4) \cdot BE_Y - 2m_p - 2m_n + 4BE_\alpha > 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow A(BE_Y - BE_X) - 4(BE_Y - BE_\alpha) > 0 \end{aligned}$$

Affinché ciò sia possibile è necessario che $BE_Y > BE_X$.

Sicuramente, processi del genere saranno possibili solo per $A > 60$ (in quanto l'energia di legame decresce al crescere di A per $A > 60$), anche se in realtà questi avvengono per $A \gtrsim 140$. Infatti, per avere $Q = 0$ risulta che si deve avere $A \approx 140$ (anche perché, come abbiamo detto e come spiegheremo meglio nel prossimo paragrafo, per Q piccolo gli elementi possono essere considerati stabili perché la loro vita media è lunghissima).

Poiché per A molto grande l'energia di legame decresce linearmente, allora Q cresce linearmente con A ($BE_Y - BE_X$ resta circa costante).

Naturalmente possono esserci eccezioni: se c'è un elemento magico, gli elementi vicini tenderanno a decadere α verso di esso, e non fin quando possibile (ad esempio ${}^{210}\text{Po}$ decade in ${}^{206}\text{Pb}$, che è un elemento magico in quanto ha $Z = 82$).

È comune che gli elementi transuranici decadano α o β a catena (il già citato ${}^{238}\text{U}$, ad esempio, subisce generalmente una sequenza di 14 decadimenti a catena).

Una nota: la valle di stabilità, come sappiamo, è curva, e se un elemento vicino ad essa decade α , se ne sarà "allontanato" (nella tabella degli elementi, infatti, un decadimento α "sposta" l'elemento di due caselle in basso e a sinistra); dovranno avvenire pertanto altri decadimenti per "riavvicinarci" alla valle (in genere sono decadimenti β , perché "riportano su" nella tabella).

Poiché l'emissione di una particella α diminuisce l' A di un nucleo di 4, mentre i decadimenti β (come vedremo) lo lasciano invariato, i decadimenti α fanno "saltare" un elemento di 4 in 4 valori di A . Ci aspettiamo dunque che esistano quattro possibili catene di decadimenti α : quelle in cui si parte da un elemento con A multiplo di 4, $4+1$, $4+2$ e $4+3$. Tuttavia, quest'ultima in natura non esiste perché l'elemento transuranico di partenza per qualche motivo è stabile.

3.2.3 Q-valore e vita media del decadimento

Sperimentalmente, come già detto, minore è il Q-valore e maggiore risulta la vita media dell'elemento che decade. Geiger e Nuttall a inizio '900 hanno proposto una legge empirica secondo la quale:

$$\ln t_{1/2} \propto \frac{1}{\sqrt{Q}}$$

ove $t_{1/2}$ è il tempo di dimezzamento dell'elemento che decade.

Vogliamo cercare di capire perché in alcuni casi i decadimenti α siano così improbabili.

²Si "perde" nel centro di massa l'energia cinetica dei reagenti; se inoltre prima dell'urto il momento angolare totale non è nullo, il sistema finale si troverà in uno stato con momento angolare totale non nullo.

Per farlo, cerchiamo di capire come il nucleo “figlio” interagisca con la particella α (sicuramente tramite le interazioni coulombiana e forte, ma dobbiamo capire in che modo). Il potenziale d'interazione fra nucleo figlio e particella α può essere schematizzato come:

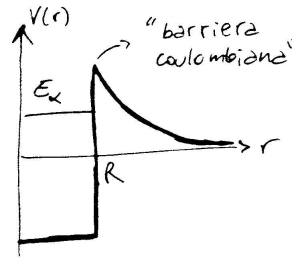


Figura 3.1: Barriera coulombiana per la particella α

In questo potenziale, per un particolare sistema, sappiamo che la particella α “esce” con una data energia E_α . Classicamente, dunque, il decadimento α è proibito, e avviene solo per effetto tunnel attraverso la barriera di potenziale. Se ora E_α è piccola (ossia Q è piccolo), la barriera da attraversare è enorme (si estende per moltissimo), e dunque l'attraversamento per effetto tunnel è poco probabile. Se invece E_α cresce (ossia Q è grande) la barriera diventa più piccola, e dunque l'uscita per effetto tunnel più probabile. È per questo che la probabilità del decadimento aumenta all'aumentare dell'energia cinetica della particella emessa.

3.2.4 Pre-esistenza della particella α

Possiamo supporre che la particella α “pre-esista” nel nucleo, con una certa probabilità (che sarà piccola: “di tanto in tanto” alcuni nucleoni si “incontrano” e formano una particella α). Una volta che la particella α si è formata, dobbiamo determinare la probabilità del processo di tunneling attraverso la barriera di potenziale. Chiamiamo “fattore di trasmissione” della barriera il rapporto fra le ampiezze della funzione d'onda della particella α dentro e fuori la buca. Nel caso di una barriera “piatta”, ad esempio:

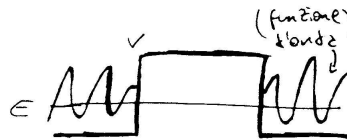


Figura 3.2: Barriera piatta di potenziale

$$T = \frac{|\psi|_{\text{destra}}^2}{|\psi|_{\text{sinistra}}^2}$$

ove si pone $k = \sqrt{V - E}$.

Per potenziali di forma diversa, si suddivide la barriera in tante piccole barriere piatte:

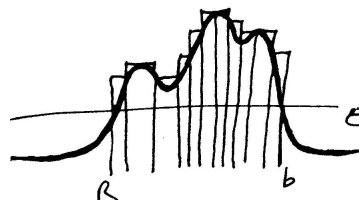


Figura 3.3: Barriera generica di potenziale

e poi si fa tendere la larghezza di quest'ultime a zero (è un metodo approssimato, che trascura le “code” della barriera). Alla fine si determina che:

$$T = e^{-2 \int_R^b k(r) dr} = e^{-2G}$$

ove G è detto *fattore di Gamow*. Questo dipende dall'altezza e dalla larghezza della barriera (più alta e larga è, maggiore è G e dunque minore è T).

Se dunque l'energia della particella α nella buca è piccola, la barriera è lunghissima³, e dunque il decadimento è poco probabile.

La costante di decadimento λ risulta il prodotto di diversi fattori:

$$\lambda = P_\alpha \cdot f \cdot e^{-2G}$$

ove P_α è la probabilità di pre-formazione della particella α e f è la frequenza di arrivo dell' α alla barriera (quante volte l' α "sbatte" contro la barriera), dunque $f = v/2R$ con v velocità dell' α nel nucleo.

Per ^{238}U , con semplici ipotesi, si può trovare $t_{1/2} = 2 \cdot 10^9$ anni, contro un valore sperimentale di $4.5 \cdot 10^9$. Anche per altri elementi si trova che questo modello è in prima approssimazione buono, anche se non perfetto.

3.2.5 Interazione fra particelle α e la materia

Quando una particella α incide su un materiale, ci interagisce in maniera prettamente coulombiana (il materiale è fondamentalmente vuoto); in un metallo, ad esempio, quest'interazione avviene in genere solo con gli elettroni (gli altri nuclei non sono liberi, e sono molto distanti fra loro). Poiché le particelle α sono pesanti, l'energia cinetica ceduta dall' α in un singolo urto è molto piccola (circa un ottomillesimo della sua massa): insomma, prima di fermarsi deve urtare con moltissimi elettroni. L'energia persa per unità di lunghezza $-dE/dx$ risulta:

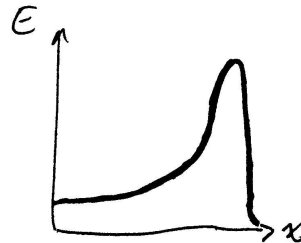


Figura 3.4: Energia ceduta dalle particelle α

ove il picco è detto *picco di Bragg*. La cessione di energia avviene insomma solo nell'ultimo tratto; questo fatto ha numerose applicazioni mediche, per esempio in ambito radioterapico.

Se invece di una sola ci sono più particelle α che incidono su un materiale, mediamente tutte avranno lo stesso comportamento.

Nel caso in cui invece un' α incida su un organismo, ad ogni urto rilascerà un'energia dell'ordine dei keV, che risulta in grado di spezzare la catena del DNA, con tutte le possibili (spiacevoli) conseguenze del caso.

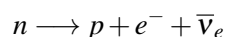
3.3 Decadimenti β

In questo tipo di processi, l'interazione che causa il fenomeno non è quella forte (come nel caso dei decadimenti α), ma una nuova "misteriosa" interazione, l'*interazione debole*, la quale risulta essere non solo estremamente più debole di quella forte, ma anche a raggio ancora più corto.

3.3.1 Generalità

I decadimenti β si dividono in due categorie, β^+ e β^- .

I decadimenti β^- sono del tipo:

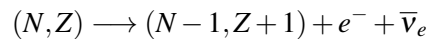


ove $\bar{\nu}_e$ è un antineutrino. Questa particella interagisce con la materia solo attraverso l'interazione debole, e quindi praticamente non ci interagisce: è per questo che neutrini e antineutrini sono estremamente difficili da

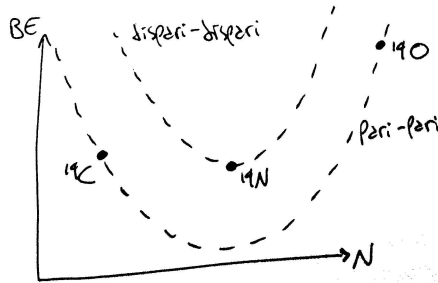
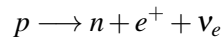
³Ad esempio, per ^{238}U si ha $G \approx 44$ e dunque $T \approx e^{-88}$, ma se E_α fosse più grande di un solo MeV, T aumenterebbe di diversi ordini di grandezza.

rilevare.

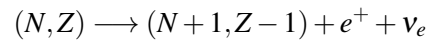
Con un decadimento β^- , dunque, un sistema nucleare si trasforma secondo:



Un decadimento β^+ , invece, è del tipo:



ove ν_e è un neutrino e e^+ un positrone⁴. In decadimenti di tipo β^+ dunque, i nuclei trasformano secondo:



Un esempio concreto di decadimento β^+ è $^{14}\text{C} \longrightarrow ^{14}\text{N}$, ed è uno dei rari processi in cui un sistema pari-pari decade in uno dispari-dispari (si passa da $Z = 6, N = 8$ a $Z = N = 7$).

3.3.2 Energia degli elettroni ed esistenza dei neutrini

Nel caso dei decadimenti β , l'energia degli elettroni emessi non è monocromatica come nel caso dei decadimenti α . Sperimentalmente risulta:

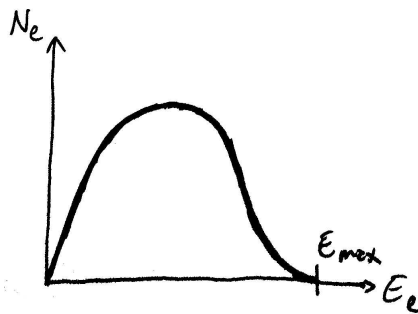
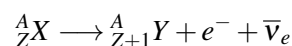


Figura 3.5: Spettro energetico degli elettroni emessi in un decadimento β

ove E_{\max} è legata alla differenza di energia fra gli stati iniziale e finale. Insomma l'elettrone non acquisisce tutta l'energia liberata nel processo (al contrario dei decadimenti α , come abbiamo visto), ma ne può assumere diverse, ognuna con una data probabilità. Se dunque supponiamo (come d'altronde fu fatto quando questo tipo di fenomeni fu scoperto) che il decadimento β sia a due corpi (neutrone e elettrone), c'è dell'energia mancante, ossia sembra che l'energia non si conservi nel processo.

L'unica soluzione per risolvere questo apparente paradosso è ipotizzare che il decadimento β non sia a due, bensì a tre corpi: dobbiamo insomma sospettare che in realtà nel processo venga emessa una terza particella (che poi è stata chiamata *neutrino*), che acquisisce l'energia mancante. Per la conservazione della carica, questa particella dovrà essere neutra (da cui il nome), e se avesse una massa comparabile con quella dell'elettrone allora si può dimostrare che la curva in fig 3.5 sarebbe simmetrica; pertanto, questa particella deve avere o massa nulla o estremamente piccola (da cui l'"-ino")⁵. Se supponiamo (com'è ragionevole che sia) che in questo processo si conservi anche il momento angolare totale, allora il neutrino dovrà avere spin 1/2.

Abbiamo dunque visto che decadimenti di tipo β sono dovuti all'interazione debole, che risulta a cortissimo raggio, e che un prototipo di decadimento β^- è:



⁴Nota: il protone è una particella stabile (o almeno così sembra) *solo se è libero!* Se interagisce con altri nucleoni tramite l'interazione forte non è più stabile, e decadimenti di tipo β^+ diventano possibili.

⁵Nel decadimento β^- compare un antineutrino, invece di un neutrino, perché nel processo deve conservarsi anche la differenza fra il numero di particelle e antiparticelle.

Ora, la regola fondamentale per un decadimento è la cosiddetta *regola d'oro di Fermi*: la costante di decadimento λ della transizione fra lo stato iniziale e finale del sistema è proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice dell'operatore che determina la transizione e a dn/dE , ove $n(E)$ è il numero di stati finali con energia totale compresa fra E e $E + dE$ che il decadimento può generare, ossia λ dipende anche dallo spazio delle fasi che può essere raggiunto da un determinato processo.

Ad esempio, supponiamo che ci sia un particolare processo di decadimento β che dia luogo ad una variazione di energia del nucleo pari a ΔE . Allora si avrà $\Delta E = E_{e^-} + E_{\bar{\nu}_e}$, ossia l'elettrone e l'antineutrino si "spartiscono" l'energia con qualunque possibile distribuzione della stessa. Nel decadimento, e^- e $\bar{\nu}_e$ possono essere emessi con momenti diversi (in modulo e direzione), concordemente con la conservazione dell'impulso totale, e a una fissata energia corrispondono moltissime possibili configurazioni dei momenti compatibili con essa (la dicitura "unico stato finale" è relativa al nucleo figlio: per un preciso stato finale, e^- e $\bar{\nu}_e$ possono essere emessi in più direzioni diverse).

Con un po' di conti, si determina che:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 f(\Delta E)$$

ove appunto ΔE è la variazione di energia fra stato iniziale e finale del nucleo, e f è una funzione, determinabile analiticamente e con quest'andamento:

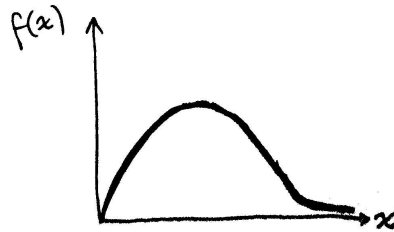


Figura 3.6: Andamento della funzione f

Insomma, la probabilità del decadimento dipende sia dalle caratteristiche interne del sistema ($|M|^2$) che da quelle cinematiche (ΔE): pertanto non si può stabilire se un decadimento β è probabile o meno in base al suo solo tempo di decadimento, perché non stiamo tenendo in conto le caratteristiche cinematiche del sistema. Per esempio, per il processo $^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N}$ si ha un tempo di dimezzamento di circa 5700 anni, ma ciò come già detto non è sufficiente a stabilire se questo sia un processo effettivamente probabile o meno.

Poiché λ è la costante di decadimento, allora:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad |M|^2 = \frac{\ln 2}{t_{1/2} f(\Delta E)}$$

ove si pone $t_{1/2} f(\Delta E) := ft$, e spesso ciò che si misura in un processo è $\log ft$. Per transizioni molto probabili (dette *super-permesse*) si ha $\log ft \approx 3 - 4$, mentre per quelle estremamente improbabili (dette *proibite*, anche se appunto non lo sono strettamente) $\log ft \approx 20 - 30$.

Il range delle vite medie dei decadimenti β varia moltissimo, approssimativamente dai microsecondi a 10^{17} anni.

3.3.3 Tipologie di decadimenti β^-

Ora, $M = \langle \psi_{\text{fin}} | M | \psi_{\text{iniz}} \rangle$ (ove M è l'operatore di transizione, che dipende dall'espressione esplicita dell'interazione debole), e:

$$\psi_{\text{fin}} = \psi_{\text{fin}}^{\text{nucleo}} \underbrace{\psi_{\text{fin}}^{\text{el}} \psi_{\text{fin}}^{\text{neutrino}}}_{\psi_{\text{fin}}^{\text{lepton}}}$$

Il modello che stiamo elaborando prevede che il decadimento avvenga nel nucleo, e dopo di esso l'elettrone e l'antineutrino si muovono liberi, e pertanto:

$$\psi_{\text{fin}}^{\text{lepton}} \approx e^{-i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

ove $\vec{p} = \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{\bar{\nu}_e}$. Se infatti e^- e $\bar{\nu}_e$ interagissero fra loro o col nucleo, la loro funzione d'onda potrebbe essere estremamente complicata; poiché però questo non accade, possiamo approssimare questa funzione d'onda come un'onda piana. Tipicamente, l'elettrone emesso ha energia dell'ordine di un MeV, pertanto $p \approx 1.4 \text{ MeV}/c$ e quindi $pr/\hbar \approx 0.003$: si può insomma sviluppare l'esponenziale, e approssimarlo con 1. Insomma, trascuriamo il contributo della funzione d'onda leptonica a quella totale.

Ciò significa che si passa da uno stato iniziale con momento angolare J_1 ad uno finale con J_2 ; poiché però stiamo trascurando la parte leptonica della funzione d'onda, resterà solo il termine⁶ relativo a $\ell = 0$.

Se dunque, come in questo caso, M non dipende dal momento angolare dei leptoni, la transizione è detta *permessa*; se invece nella transizione si ha $\ell \neq 0$, la si dice *proibita* (anche se è solo sfavorita, non realmente proibita), e in questo caso il termine dello sviluppo dell'onda piana che contribuisce sarà solo uno, quello relativo alla variazione di ℓ nel decadimento.

Ora, elettrone e antineutrino hanno entrambi spin $1/2$, e dunque possono accoppiarsi a spin totale 0 o 1; nel primo caso (spin antiparalleli) la transizione è detta *di Fermi* mentre nell'altro (spin paralleli) *di Gamow-Teller*. Lo spin complica la situazione perché la differenza di momento angolare ΔJ sarà uguale a:

$$\Delta J = \vec{J}_i - \vec{J}_f = \vec{L} + \vec{S}$$

ove \vec{L} è il momento angolare orbitale totale dell'elettrone e del neutrino, mentre \vec{S} il loro spin totale.

Le transizioni permesse saranno quelle con $\vec{L} = 0$, e in queste la parità del sistema non cambia (perché proporzionale a $(-1)^L$). In transizioni di Fermi si ha $\Delta J = 0$, in quanto $\vec{L} = \vec{S} = 0$, e dunque decadimenti di questo tipo collegheranno stati iniziali e finali con stesso momento angolare e parità.

Se invece la transizione è di tipo Gamow-Teller, $\Delta J = 1$ ($\vec{L} = 0$, $\vec{S} = 1$), e il momento angolare (ma non la parità) cambierà.

Ad esempio, $0^+ \rightarrow 0^+$ è una transizione permessa di tipo Fermi, mentre $0^+ \rightarrow 1^+$ è permessa di tipo Gamow-Teller. Se invece consideriamo una transizione $1^+ \rightarrow 1^+$, di che tipo è? È sicuramente compatibile con $\vec{L} = \vec{S} = 0$, quindi può essere permessa di tipo Fermi. Può anche essere, inoltre, che si abbia $\vec{S} = 1$ e $\vec{L} = 0, 1, 2$, quindi può essere anche di tipo Gamow-Teller. Insomma, se non abbiamo ulteriori informazioni, $1^+ \rightarrow 1^+$ è una mistura di transizioni di tipo Fermi e Gamow-Teller.

Cosa accade invece per le transizioni proibite? Supponiamo di osservarne una, nel quale uno stato eccitato 1^- decade in 0^+ . Che tipo di transizione può essere?

Sicuramente non è permessa perché \vec{L} dev'essere dispari (e la parità non è conservata), dunque $\vec{L} = 1, 3, 5, \dots$

La transizione può dunque essere di Fermi proibita al primo ordine ($\vec{L} = 1$, $\vec{S} = 0$), o di Gamow-Teller proibita al primo ordine ($\vec{L} = 1$, $\vec{S} = 1$). In realtà non può essere proibita a ordini superiori perché ad esempio con $\vec{L} = 3$ non si possono soddisfare le richieste (non può essere $\Delta J = 1$ per nessun valore di \vec{S}).

La transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ che abbiamo già visto, invece, non può che essere di tipo Fermi (se fosse di Gamow-Teller si dovrebbe avere $\Delta J = 1$).

Infine, la transizione $0^+ \rightarrow 1^+$ non può essere di Fermi proibita al prim'ordine (perché la parità non cambia), mentre può essere di Gamow-Teller permessa (ma non di altri tipi).

Un'eventuale transizione $5^+ \rightarrow 0^+$ può essere o di Gamow-Teller proibita al quarto ordine: si tratta pertanto di un decadimento estremamente improbabile.

3.3.4 Alcune note sui decadimenti β

In un decadimento di tipo β in realtà non è vero (come in fondo abbiamo supposto sinora) che un protone si trasforma in neutrone o viceversa, lasciando "imperturbati" tutti gli altri nucleoni; ciò che in realtà avviene è che un sistema a molti corpi (il nucleo iniziale) si trasforma in un altro sistema a molti corpi (il nucleo figlio). Da un punto di vista quantistico, la funzione d'onda del nucleo figlio conterrà una parte relativa a un sistema a molti corpi e una alle particelle emesse; la parte relativa agli $A - 1$ oggetti finali sarà però identica a quella iniziale.

Consideriamo ad esempio il processo $^{17}\text{F} \rightarrow ^{16}\text{O} + n$; ^{17}F è formato da ^{16}O e un protone, con p nello stato

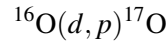
⁶Poiché $\vec{p} \cdot \vec{r}$ può essere espresso tramite funzioni trigonometriche, con opportuni rimaneggiamenti potrà essere espresso in termini di armoniche sferiche. Pertanto, l'esponenziale che definisce la funzione d'onda leptonica sarà sviluppabile in termini ognuno relativo ad armoniche sferiche di diverso ordine, e dunque a diversi possibili valori di ℓ .

$d5/2^+$, e anche il neutrone creato nel processo è nello stesso stato. In questo caso la parte di funzione d'onda relativa a ^{16}O resta sempre la stessa, e cambia quella relativa a uno dei protoni.

In uno stato eccitato di ^{17}O si potranno avere, ad esempio, due neutroni in $d5/2$ e un buco sottostante: in questo caso la transizione $p(d5/2) \rightarrow n(d5/2)$ sarà poco probabile perché ci sono interazioni con molti corpi.

Gli operatori che consentono il passaggio da uno stato all'altro dei nucleoni sono in genere a 1,2,3,4 ecc. corpi.

Consideriamo ora la reazione di trasferimento⁷:



(in pratica, un neutrone viene “strappato” dal deutone, e resta intrappolato nel nucleo di ossigeno). Se la funzione d'onda di ^{17}O ha delle shell chiuse, allora il neutrone dovrà necessariamente posizionarsi fuori da queste (in uno stato fondamentale, ossia il più basso disponibile, o eccitato); ciò che sicuramente non può avvenire è che si eccitino stati interni alle shell. Questo fa sì che certi processi di decadimento β possano essere più o meno probabili in base a quanto la funzione d'onda finale “assomigli” a quella iniziale.

Ora, in un decadimento β l'elettrone e l'antineutrino (o il positrone e il neutrino), “andandosene” dal nucleo possono “portarsi dietro” momento angolare orbitale e spin. Detti rispettivamente \vec{L} e \vec{S} il momento angolare orbitale e lo spin “portati via” dalle particelle emesse, e \vec{J} e \vec{J}' i momenti angolari del nucleo prima e dopo il decadimento, si dovrà avere:

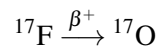
$$\vec{J} = \vec{J}' + \vec{L} + \vec{S}$$

All'aumentare di \vec{L} l'elemento di matrice di transizione diventa sempre più piccolo, rendendo meno probabile il decadimento stesso. Come già visto, il caso “ideale” è quello con $\vec{L} = 0$ (“transizioni permesse”), che contiene transizioni di due tipi, di Fermi e di Gamow-Teller.

3.3.5 Esempi di decadimenti β

^{17}F

Il decadimento è il seguente:



In questo caso, i due nuclei sono speculari.

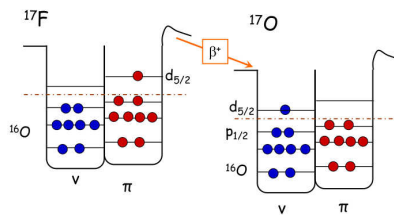
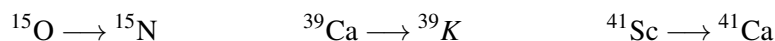


Figura 3.7: Rappresentazione del decadimento β del ^{17}F

Le energie dei due nuclei non sono le stesse perché ci sono anche le interazioni coulombiane, che come abbiamo già visto modificano l'energia complessiva del nucleo.

Questo processo è un esempio di *transizione super-permessa*, in quanto le funzioni d'onda iniziale e finale del nucleo sono “quasi identiche”.

In generale, poiché gli stati finale e iniziale sono $5/2^+$, allora $\vec{L} + \vec{S} = 5, 4, 3, 2, 1, 0$ (in realtà dovrebbe essere pari per la conservazione della parità). La transizione più favorita sarà dunque quella con $\vec{L} = 0$, e in corrispondenza di questo si può avere $\vec{S} = 0$ o $\vec{S} = 1$. Questo processo, dunque, può essere sia di tipo Fermi che Gamow-Teller. Altri esempi di transizioni fra nuclei speculari (che risultano super-permesse) sono:



(le ultime due hanno $\log ft \approx 3.5$).

⁷Il significato di questa notazione è il seguente: ^{16}O è il bersaglio, d il proiettile, p l'eiettile (ossia ciò che viene “sparato fuori” dalla reazione) e ^{17}O ciò che resta dopo l'urto.

Neutrone, trizio e ^{14}O

Il neutrone decade β^- in un protone, ossia ^1H . In questo caso si passa dallo stato $1/2^+$ a $1/2^+$, dunque $\vec{L} + \vec{S} = 0$ oppure 1. Si può dunque avere $\vec{S} = 0$ e $\vec{L} = 1$, ma ciò non farebbe conservare la parità; pertanto si ha $\vec{L} = 0$ e $\vec{S} = 0, 1$. La transizione è dunque permessa, sia Fermi che Gamow-Teller.

Analogamente, ^3H decade in ^3He , e gli stati iniziale e finale sono gli stessi del neutrone. Pertanto, anche questa è una transizione permessa sia Fermi che Gamow-Teller.

Consideriamo ora la transizione $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$. Si tratta di una transizione permessa di tipo Fermi ($0^+ \rightarrow 0^+$); considerando l'isospin, la transizione è $T = 1 \rightarrow T = 1$. Tuttavia, esistono stati di ^{14}N con $T = 0$: le transizioni in questi stati risultano proibite.

 ^{60}Co

È un nucleo interessante, perché spesso decade γ . ^{60}Co , infatti, decade in ^{60}Ni , spesso in stati eccitati che poi decadono γ .

Lo stato iniziale del ^{60}Co è 5^+ : pertanto, per decadere direttamente nello stato fondamentale di ^{60}Ni si dovrebbe avere $\vec{L} + \vec{S} = 5$, ad esempio con $\vec{L} = 4$ e $\vec{S} = 1$, che è una transizione Gamow-Teller proibita al quart'ordine; si tratta dunque di un decadimento estremamente improbabile.

Se invece decadesse nello stato 2^+ di ^{60}Ni , la transizione sarebbe di Gamow-Teller proibita del second'ordine. La transizione più probabile, tuttavia, è quella in cui il sistema decade nello stato 4^+ del ^{60}Ni , che è permessa di tipo Gamow-Teller ($\log ft = 7.4$).

Sperimentalmente, risulta che ^{60}Co ha il 99.88% di probabilità di decadere nello stato 4^+ del ^{60}Ni , e lo 0.12% di decadere in quello 2^+ .

 ^{14}C

Il ^{14}C può decadere solo nello stato fondamentale di ^{14}N , perché ha solo questa possibilità. Poiché lo stato iniziale è 0^+ e quello finale 1^+ , la transizione è permessa di tipo Gamow-Teller; poiché però $T_{in} = 1$ e $T_{fin} = 0$, la transizione sarà comunque abbastanza improbabile, e infatti ha $t_{1/2} \approx 5700$ anni e $\log ft \approx 9$.

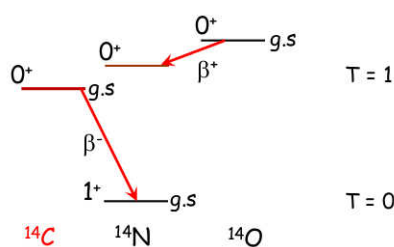


Figura 3.8: Rappresentazione del decadimento β del ^{14}C

Nota: ^{14}N nello stato 0^+ può decadere in ^{14}C ma preferisce decadere γ nel suo stato fondamentale (è una proprietà generale dei nuclei quella di “preferire” il decadimento γ a tutti gli altri).

 ^{115}In

La transizione è $^{115}\text{In} \rightarrow ^{115}\text{Sn}$. Poiché si passa da uno stato $9/2^+$ a $1/2^+$, $\vec{L} + \vec{S} = 4$: il meglio che possiamo avere è $\vec{L} = 4$ e $\vec{S} = 0, 1$; si tratta dunque di una transizione sia di tipo Fermi che Gamow-Teller proibita al quarto ordine. Sperimentalmente, si ha $\log ft \approx 22.7$ e $t_{1/2} = 6 \cdot 10^{14}$ anni.

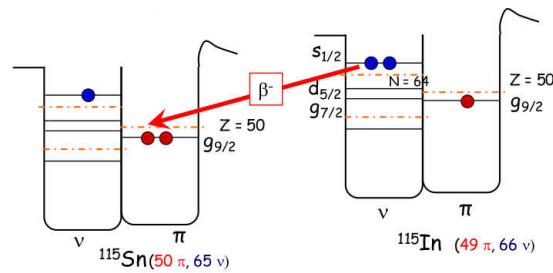


Figura 3.9: Rappresentazione del decadimento β del ^{115}In

^{40}K

Può decadere sia β^- che β^+ .

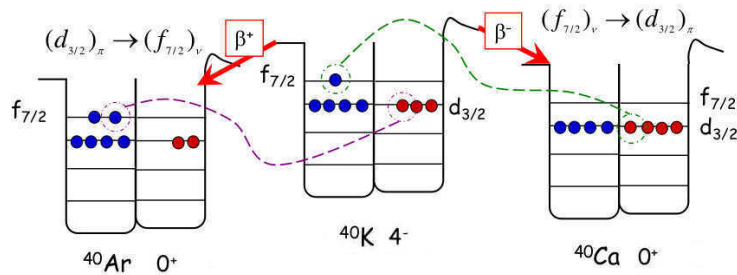


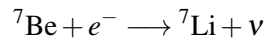
Figura 3.10: Rappresentazione del decadimento β del ^{40}K

Fra questi due, il decadimento più semplice è il β^- (quello nel quale il protone “riempie il buco” presente nel lato dei neutroni). Poiché la transizione è $4^- \rightarrow 0^+$, $\vec{L} = 3$ e $\vec{S} = 1$, pertanto è una transizione di tipo Gamow-Teller proibita al terzo ordine.

Contemporaneamente, però, c’è anche la possibilità di un decadimento β^+ , che sembrerebbe poter essere più probabile in quanto la formazione di coppie è favorita rispetto ai singoli nucleoni. Pertanto, ^{40}K può decadere in ^{40}Ar nello stato eccitato 2^+ , che è una transizione proibita al second’ordine. In realtà questa risulta meno probabile dell’altra perché il ΔE fra i due stati è piccolissimo, e dunque sfavorito cinematicamente. La transizione a ^{40}Ar nello stato fondamentale è anch’essa proibita del terzo ordine.

3.3.6 Cattura elettronica

Nel nostro modello del decadimento β , e^- e $\bar{\nu}_e$ (oppure e^+ e ν_e) hanno spettro energetico continuo. Nei neutrini solari, però, oltre allo spettro continuo si osservano anche righe con energia ben determinata. Queste derivano da processi detti di *cattura elettronica*, nei quali un sistema “cattura”, appunto, un elettrone e si trasforma in un nuovo sistema, emettendo un neutrino. Un esempio di questo tipo di processi è:



È un processo che “compete” col decadimento β .

Lo spazio delle fasi, nei due casi, non è però lo stesso, e ha dipendenza opposta da Z a seconda dei casi. In genere, la cattura elettronica risulta più favorita (il $1/2$ MeV della massa dell’elettrone o del positrone non va “speso” nel processo, ma è già dato). Nel caso del ^{40}K visto prima, il processo $^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ar}(2^+)$ è prevalentemente dovuto a cattura elettronica.

3.4 Decadimenti γ

3.4.1 Generalità

Hanno a che fare con trasformazioni all’interno dello stesso sistema. In un decadimento γ un sistema passa da uno stato con una certa energia ad uno con energia minore.

Sappiamo che in un generico sistema quantistico soggetto a un potenziale V potranno esistere più o meno stati legati; ad esempio nel caso dell'interazione coulombiana fra protone ed elettrone in un atomo di idrogeno ne esistono infiniti, di stati legati. Sappiamo poi che se un elettrone si trova in uno stato che non sia quello fondamentale allora decadrà più o meno velocemente in quest'ultimo. Teoricamente, dall'espressione dell'hamiltoniana come $H = T + V$ (con T energia cinetica) non deriva che la particella debba necessariamente decadere: in realtà infatti la "vera" hamiltoniana contiene anche termini relativi al campo elettromagnetico, e sono questi che permettono all'elettrone di decadere nello stato fondamentale. Insomma, le autofunzioni del sistema protone-elettrone possono evolvere temporalmente come conseguenza dell'interazione col campo elettromagnetico (esterno).

Un ragionamento del tutto analogo vale anche per i nucleoni all'interno di un nucleo atomico. In particolare, se il nucleo transisce fra uno stato iniziale di energia ε_i e uno finale di energia ε_f emetterà di conseguenza una radiazione di energia $\Delta E = \varepsilon_i - \varepsilon_f$ (ovviamente, al variare di ΔE varia la lunghezza d'onda della radiazione emessa). La situazione, insomma, è la seguente:

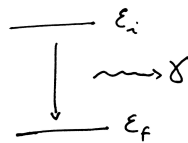


Figura 3.11: Schema di un decadimento γ

Nel caso di transizioni atomiche, la radiazione emessa è generalmente nell'ambito del visibile; nel caso delle transizioni nucleari, invece, le radiazioni elettromagnetiche emesse sono di tipo γ , dunque estremamente energetiche.

Poiché la transizione è caratterizzata da una certa costante di decadimento λ , e quindi da un tempo di dimezzamento $t_{1/2}$, lo stato ε_i sarà caratterizzato da una certa larghezza per via del principio di indeterminazione di Heisenberg. L'indeterminazione energetica di un livello nucleare è $\Gamma = \hbar/\tau$, con τ vita media dello stato iniziale; i decadimenti γ sono estremamente veloci, con in genere $\tau \approx 1$ ps (dunque $\Gamma = 0.66$ meV). Nel caso, ad esempio, del ^{60}Co , sappiamo che decade in stati eccitati di ^{60}Ni , che emettono radiazione γ a 1.17 MeV e 1.33 MeV.

Cosa accade quando un sistema emette radiazione elettromagnetica? I fotoni infatti non trasportano solo energia, ma anche momento ($p = E/c$): ci aspettiamo dunque che il nucleo abbia un rinculo. Facendo i conti si determina che l'energia del γ emesso è (non è pari a ΔE proprio perché il nucleo figlio assorbe dell'energia cinetica):

$$E_\gamma = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

ove M è la massa iniziale del nucleo. Se però $\Delta E \approx 1$ MeV in un nucleo con $A \approx 100$, il secondo termine è assolutamente trascurabile. Possiamo dunque supporre effettivamente $E_\gamma = \Delta E$ (il nucleo è molto pesante e quindi si prende poca energia).

Se l'emissione γ avviene durante un urto, bisogna tener conto anche dell'effetto Doppler: nel sistema di riferimento del nucleo avviene infatti quanto abbiamo appena visto, ma per portarci nel sistema di riferimento del laboratorio dovremo effettuare un boost. Sperimentalmente, questo porta all'allargamento delle righe di emissione.

In generale, lo spettro γ di un nucleo è relativamente semplice a basse energie, e diventa estremamente complicato per energie più alte (vedere, come esempio, lo spettro di ^{152}Dy sulle slides); infatti ad alte energie stati di shell diverse iniziano a sovrapporsi l'un l'altro. Inoltre, per energie molto alte un nucleo può diseccitarsi emettendo nucleoni o particelle α , ma se questo non fosse possibile (ossia energeticamente consentito) allora va incontro a una cascata di decadimenti γ . A partire da fenomeni del genere si può cercare di ricostruire lo spettro del nucleo.

Alcune porzioni di spettro, però, possono avere una struttura semplice anche per energie molto alte (cfr. solita slide); alcune di queste possono essere spiegate tramite un modello descrivente un oggetto rotante. Può

accadere infatti che (contrariamente a quanto supposto sinora) un nucleo possa “preferire” di ruotare e deformarsi, invece di essere sferico (e non ruotare)⁸, e si parla di “bande rotazionali”. Ad esempio, l'idrogeno ha bande rotazionali con momenti angolari pari, per motivi di simmetria. Nel caso di ¹⁵²Dy, inoltre, la banda rotazionale ha sempre momento angolare pari, fino a circa 60 ~ 70.

Ora, è vero che (come abbiamo detto) tutti i nucleoni si muovono in un campo medio indipendentemente fra loro, ma talvolta possono mettersi a ruotare tutti collettivamente nello stesso modo (si parla di “moti collettivi” del nucleo). Insomma, ogni tanto un sistema nucleare può presentare aspetti collettivi; si tratta di una proprietà tipicamente quantistica di questi sistemi (classicamente, il sistema o presenta aspetti collettivi oppure no).

3.4.2 Tipi di radiazione γ

Sappiamo che una radiazione elettromagnetica corrisponde a un campo elettromagnetico oscillante; questa radiazione può essere generata o da una carica elettrica oscillante (radiazione di tipo E o elettrica) o da una corrente oscillante (radiazione di tipo M o magnetica). Questi tipi di radiazione sono distinguibili, cioè non strutturalmente identici.

La radiazione elettromagnetica ha momento angolare che non può essere nullo ($L = 1, 2, 3, 4, \dots$); una generica radiazione sarà dunque indicata, a seconda del suo tipo, da una lettera (E o M) e da un numero (che ne indica il momento angolare). Ad esempio, $E1$ è una radiazione elettrica con momento angolare 1, $M3$ è una radiazione magnetica con momento angolare 3 ecc. In base al valore di L si parla anche di *multipolarità* della radiazione; se $L = 1$ si parla di *dipolo*, per $L = 2$ *quadrupolo*, per $L = 3$ *ottupolo* e così via. Il tipo di radiazione emessa dipenderà dunque dai momenti angolari degli stati iniziali e finali: se ad esempio la sorgente è un elemento che decade $2^+ \rightarrow 0^+$, $L = 2$ e pertanto la radiazione sarà di tipo $E2$ o $M2$. In questo caso, però, la parità è conservata.

In generale, un dipolo elettrico è un oggetto a parità negativa ($\vec{d} = q\vec{r}$, e invertendo gli assi cambia di segno \vec{r} , dunque anche \vec{d}), mentre un momento di dipolo magnetico è a parità positiva ($\vec{\mu} = q\vec{r} \times \vec{v}$, e invertendo gli assi sia \vec{r} che \vec{v} cambiano di segno, pertanto $\vec{\mu}$ resta inalterato).

In generale, transizioni elettriche hanno parità $(-1)^L$ e quelle magnetiche hanno parità $(-1)^{L+1}$.

La natura della radiazione emessa può essere determinata in base alla distribuzione spaziale dei fotoni emessi (ad esempio se la radiazione è di dipolo elettrico, ossia $E1$, l'intensità sarà massima in direzione perpendicolare al dipolo stesso).

Dunque, nel caso della transizione $2^+ \rightarrow 0^+$ si ha $L = 2$, e dunque per la conservazione della parità la radiazione emessa sarà di tipo $E2$.

Vediamo altri esempi:

$2^+ \rightarrow 2^+$: si ha $L = 1, 2, 3, 4$ (0 va escluso perché la radiazione elettromagnetica non può avere momento angolare nullo). La transizione può dunque essere di tipo $E1, E2, E3, E4, M1, M2, M3$ o $M4$. Considerando la parità, si deve avere L pari per transizioni elettriche, e dispari per quelle magnetiche. La radiazione potrà dunque essere di tipo $E2, E4, M1$ o $M3$, e quindi può avvenire in diversi modi, ognuno con diversa probabilità. Facendo i conti si determina che la probabilità di transizione, oltre che da ΔE , dipende anche dalla “probabilità di transizione ridotta” (legata all'elemento di matrice dell'operatore che consente la transizione) e dal valore di L , e che ci sono molti ordini di grandezza di differenza fra un valore di L e un altro all'interno della stessa categoria di radiazione (E o M). In generale, risultano favorite transizioni con L basso, e a parità di L le transizioni elettriche sono più probabili di quelle magnetiche.

Nel caso dell'esempio, le transizioni più probabili saranno $M1$ e $E2$, e in genere la radiazione emessa sarà una miscela delle due (sono entrambe abbastanza probabili, quella magnetica perché ha basso momento angolare e quella elettrica perché è elettrica, anche se con momento angolare più alto).

$4^+ \rightarrow 2^+$: si ha $L = 2, 3, 4, 5, 6$, quindi si può avere $E2, \dots, E6$ o $M2, \dots, M6$. Considerando la parità, le possibilità si riducono a $E2, E4, E6, M3$ e $M5$. Le transizioni più probabili saranno dunque $E2$ e $M3$, e la prima risulterà molto più favorita della seconda (le altre praticamente non avvengono mai).

¹³⁷Cs: decade β^- in ¹³⁷Ba nello stato eccitato $11/2^-$, che poi decade γ nello stato $3/2^+$. Si ha dunque $L = 4, 5, 6, 7$, e considerando che la parità cambia le transizioni possibili saranno $M4, E5, M6$ e $E7$: di queste

⁸L'energia associata a questa rotazione sarà $E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{I}$

$M4$ è di gran lunga la più favorita, anche se di per se avrà una probabilità piccolissima di avvenire. In questo caso lo stato $11/2^-$ è detto *isomerico*, ossia si trova eccitato rispetto allo stato fondamentale, ma vive più a lungo rispetto agli altri stati eccitati (per quanto riguarda le regole di selezione).

¹¹⁰**Ag**: decade γ , ma può anche decadere β^- . In realtà, anche se la transizione γ è poco probabile (a seconda dell'eccitazione dello stato finale può essere $M4$ o $M5$), dominerà sulla β^- , perché in genere i nuclei “preferiscono” decadere γ , se è possibile.

¹⁷⁸**Hf**: può decadere γ (da uno stato 16^+) di tipo $E3$ (stato finale 13^-) o $M4$ (12^-), e ha un tempo di dimezzamento altino (circa 31 anni) perché gli stati finali appartengono a bande rotazionali diverse, ed è poco probabile che un sistema passi da una banda rotazionale ad un'altra, perché cambia struttura interna (e se le funzioni d'onda finale e iniziale non si “assomigliano” la transizione sarà poco probabile).

Vengono anche introdotti dei valori, detti “probabilità di transizione di particella singola”, che rappresentano la probabilità che una transizione avvenga per via di una sola particella. Confrontando i risultati teorici con quelli sperimentali, si trova che vicino alla chiusura delle shell nucleari il loro rapporto è piccolo (dunque questi stati possono essere ben descritti da stati di particella singola), mentre aumenta considerevolmente allontanandosi da esse (in questo caso gli stati del sistema non possono essere descritti in termini di particelle singole, ma tramite stati collettivi come quelli rotazionali).

Parte II

Fisica subnucleare

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La fisica subnucleare

Ciò di cui si occupa la fisica delle particelle elementari è cercare di capire quali sono i costituenti ultimi della materia.

Il nucleo, come abbiamo visto, è un sistema complesso, composto da particelle dette *nucleoni*. Tuttavia, col tempo si è capito che i nucleoni *non* sono particelle elementari, ma costituiti da altre particelle, dette *quark*.

Caratteristica principale dei quark è quella di avere carica frazionaria (come $1/3$ o $-2/3$, ad esempio); tuttavia, i quark non possono esistere liberi per via delle caratteristiche della forza che li lega all'interno di un nucleone, e sono raggruppati sempre in modo da costituire particelle di carica nulla o ± 1 .

Ad oggi, i quark sembrano non avere struttura interna, e pertanto sembrano essere i costituenti fondamentali della materia.

Esistono sei tipi di quark: i primi ad essere stati scoperti sono l'up e il down (che sono i quark che costituiscono i nucleoni), ai quali seguono lo strange (il nome deriva dal fatto che sono stati introdotti per spiegare il comportamento "strano" dei kaoni) e lo charm, e poi infine il top e il bottom. La materia ordinaria è composta da questi sei quark.

Esistono anche tre particelle, ossia l'elettrone, il muone e il tau, che risultano indivisibili; alla stessa famiglia (detta dei *leptoni*) appartengono i neutrini (elettronico, muonico e tauonico). Queste particelle hanno portato grande scompiglio all'interno del modello standard (ossia l'attuale modello che descrive le caratteristiche delle particelle elementari), perché teoricamente non dovrebbero avere massa, anche se sembra che ce l'abbiano, in realtà.

Quark e leptoni sono tutti fermioni.

Fra le particelle elementari esistono poi anche quattro bosoni che sono i mediatori delle interazioni fondamentali: i fotoni (radiazione elettromagnetica), i gluoni (interazione forte) e i bosoni Z^0 e W^\pm (interazione debole).

Esistono poi altri due bosoni: il bosone di Higgs (recentemente scoperto) e il gravitone (quest'ultimo non ancora trovato).

Se non si introduce il bosone di Higgs, le interazioni avvengono, nel modello standard, fra particelle senza massa, e dunque fino a qualche tempo fa non si riusciva a capire come le particelle potessero avere massa. Il bosone di Higgs porta a una rottura spontanea di simmetria, che permette di "dare" massa alle particelle.

Il gravitone, poi, dovrebbe essere il bosone responsabile dell'interazione gravitazionale; la questione però è ancora aperta, in quanto non si riesce a quantizzare la gravità.

Il fotone è l'unico bosone che, accoppiandosi al campo di Higgs, resta privo di massa. In realtà anche il gluone ha questa caratteristica, ma il gluone esiste come un otetto (esistono otto "tipi" di gluoni), perché l'interazione fondamentale ha un nuovo numero quantico, detto "colore".

Queste sono, ad oggi, le uniche particelle elementari che conosciamo, anche se già sappiamo che non bastano per spiegare tutto.

Le interazioni elettromagnetica e debole sono state unificate, ossia ad alte energie risultano la stessa forza (la loro lagrangiana è la stessa). A temperature più basse questa lagrangiana si “rompe”, e si “manifesta” sotto forma di due forze diverse.

La differenza fondamentale fra interazione forte ed elettromagnetica è che il colore dei gluoni permette loro di interagire: il campo interagisce con se stesso (al contrario del campo elettromagnetico, visto che i fotoni non hanno carica e quindi non interagiscono fra loro).

Noi, per ovvie ragioni, non ci occuperemo mai dell’interazione gravitazionale.

Ci sono poi molte differenze fra l’interazione elettrodebole e quella forte: l’elettrodebole diminuisce al crescere della distanza, mentre quella forte cresce al crescere della distanza; l’attrazione fra due quark è talmente forte che se cerchiamo di separarne due, questi si “spaccano” creando nuove particelle (“confinamento” dei quark).

1.2 Cinematica delle particelle elementari

Rivediamo brevemente quei concetti di cinematica relativistica che ci serviranno in seguito.

Le particelle elementari hanno generalmente una massa molto più piccola della loro energia cinetica (anche quelle più pesanti): insomma, le particelle elementari vanno *sempre* considerate relativisticamente, e per noi si muoveranno quasi sempre alla velocità della luce.

Sappiamo che in cinematica relativistica possiamo definire:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Se poi consideriamo due sistemi di riferimento, come in figura 1.1, e chiamiamo P un evento, abbiamo:

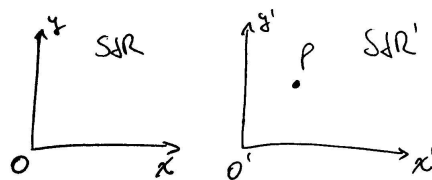


Figura 1.1: Sistemi di riferimento considerati

$$x' = \gamma(x - \beta_r ct) \quad y' = y \quad z' = z \quad ct' = \gamma(ct - \beta_r x)$$

ove β_r è la velocità relativa del sistema di riferimento primato rispetto all’altro. Quelle appena scritte sono, come noto, le trasformazioni di Lorentz per il quadrivettore (ct, \vec{r}) .

Questo quadrivettore non sarà tuttavia di grande interesse per noi, visto che vogliamo descrivere le interazioni fra le particelle, e non il loro moto; ci serviremo soprattutto del quadrimpulso:

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = (m\gamma c, m\gamma \vec{v})$$

per il quale:

$$p_{x'} = \gamma \left(p_x - \beta_r \frac{E}{c} \right) \quad p_{y'} = p_y \quad p_{z'} = p_z \quad \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta_r p_x \right)$$

Sappiamo poi che vale:

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 \gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 v^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

È una relazione fondamentale che collega l'energia di una particella alla sua massa e al suo impulso, e che utilizzeremo spessissimo.

Normalmente, useremo il sistema di unità di misura naturali, che ci semplificherà notevolmente i conti. In questo sistema di misura si pone $c = 1$ e $\hbar = 1$, ossia $h = 2\pi$; come unità di misura dell'energia, invece, useremo l'eV.

Ponendo $c = 1$, la relazione precedente può essere scritta come $m^2 = E^2 - p^2$, che vale per una singola particella. Se invece abbiamo più particelle (che non interagiscono fra loro):

$$m^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2$$

pertanto, la massa del sistema *non* è la somma delle energie delle singole componenti (questa relazione è palesemente non lineare); coinciderà però con l'energia del sistema nel suo centro di massa, perché è un invariante relativistico. Infatti, sfruttando la variabile di Mandelstam s :

$$s_{\text{lab}}^2 := m^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2 \quad s_{\text{cdm}}^2 := m^2 = \left(\sum_i E_i^* \right)^2$$

(ricordiamoci che per definizione nel centro di massa si ha $\sum_i \vec{p}_i^* = 0$).

Per studiare com'è fatta la materia, dall'esperimento di Rutherford in poi usiamo come tattica quella di lanciarci particelle contro.

I tipi i esperimenti di questo tipo si dividono nelle seguenti categorie:

a targhetta fissa: in questo caso il bersaglio è fermo nel sistema di riferimento del laboratorio:

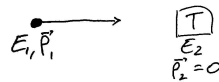


Figura 1.2: Collisione a targhetta fissa

collider: si fanno scontrare frontalmente due fasci di particelle:



Figura 1.3: Collisione in un collider

Nel caso della targhetta fissa, si ha:

$$s = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2$$

mentre nel caso del collider:

$$s = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 - p_1^2 - p_2^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = m_1^2 + m_2^2 + 4E_1 E_2$$

ove l'ultimo passaggio è valido nell'ipotesi in cui $E \gg m$ e \vec{p}_1 e \vec{p}_2 siano collineari (e quindi $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = -p_1 p_2$). Da questo calcolo possiamo capire perché in genere si prediligono i collider. Facendo infatti un grafico di s in funzione dell'energia del proiettile E_1 , si ha:

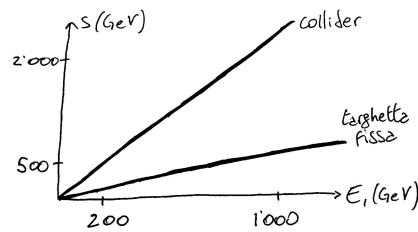
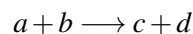


Figura 1.4: Confronto in resa energetica fra collisioni a targhetta fissa e collider

Nei collider, dunque, l'energia a disposizione nel centro di massa cresce molto velocemente con l'energia dei fasci. Pertanto, poiché s è l'energia del sistema nel centro di massa, maggiore è s maggiore è la massa che si ha a disposizione per “creare qualcosa di nuovo”.

1.3 Collisioni

Quando parliamo di *collisioni* intendiamo generalmente che due particelle a e b interagiscono fra loro, dando luogo a uno stato finale diverso da quello iniziale; ad esempio:



Lo stato iniziale è completamente noto, mentre quello finale è caratterizzato da quello che vogliamo o possiamo conoscere (come l'impulso delle particelle, o gli angoli fra le loro direzioni di volo).

In altri tipi di processi, può accadere che lo stato iniziale sia composto da una sola particella:



Questo tipo di reazioni sono i *decadimenti*; generalmente, a è in quiete nel laboratorio (ma non è detto, se per esempio pensiamo al fatto che nei raggi cosmici le particelle che decadono si muovono a velocità molto elevate).

1.3.1 Collisioni a targhetta fissa

Le due entità che entrano in gioco sono:

fascio: sono le particelle entranti, le cui grandezze caratteristiche sono:

- I_b : l'intensità del fascio, ossia il numero di particelle che arrivano al bersaglio nell'unità di tempo
- φ_b : il flusso, ossia l'intensità per unità di superficie

targhetta: è il bersaglio fisso, caratterizzato da:

- n_t : numero di centri di scattering¹ per unità di volume
- N_t : numero di centri di scattering diviso l'area del fascio

Ciò che ci interessa è calcolare il rate d'interazione:

$$R = \frac{dN}{dt}$$

che è il numero di interazioni che avvengono per unità di tempo. Si ha:

$$R = N_t \varphi_b \sigma$$

¹Si parla in generale di “centri di scattering” perché a seconda dell'energia del fascio l'oggetto che effettua lo scattering può cambiare; se infatti una particella ha alta energia avrà piccola lunghezza d'onda, e quindi con essa possiamo “vedere” cose più piccole. Insomma, a seconda dell'energia del fascio, questo interagirà con l'opportuno centro (atomo, nucleo, nucleone o quark); questo è anche il metodo col quale si può cercare di capire se i quark abbiano o meno una struttura interna.

ove σ è la *sezione d'urto*. In modo intuitivo (poi ci ritorneremo in maggior dettaglio), σ è una “sovrapposizione” dell'area del fascio e della sezione trasversale della targhetta.

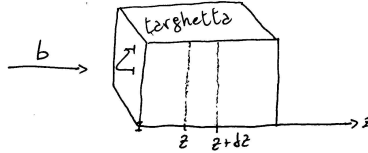
Spesso si scrive anche:

$$R = WN_t \quad \text{ossia} \quad W = \varphi_b \sigma$$

ove W è il rate per singola particella del fascio. Non stiamo però tenendo conto che, se avvengono interazioni, il flusso φ_b non può essere costante nella targhetta.

Come varia dunque il flusso?

Consideriamo la seguente situazione:



Indichiamo la variazione di rate con dR_i . Si ha:

$$dR_i = -dI_b(z)$$

e inoltre:

$$\varphi_b = \frac{I_b}{\Sigma} \quad \Rightarrow \quad dR_i = \sigma \varphi_b dN_t = \sigma \frac{I_b}{\Sigma} \underbrace{n_t \Sigma dz}_{dN_t}$$

Quindi:

$$dR_i = \sigma I(z) n_t dz \quad \Rightarrow \quad dI(z) = -\sigma I(z) n_t dz \quad \Rightarrow \quad I(z) = I_0 e^{-\sigma n_t z}$$

e dunque il flusso all'interno della targhetta diminuisce esponenzialmente con σ , n_t e z .

Riferendosi al fascio, si definisce la *lunghezza d'assorbimento* come quella lunghezza dove $I = I_0/e$:

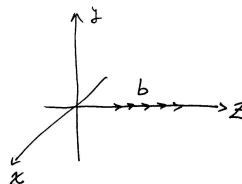
$$\frac{I_0}{e} = I_0 e^{-\sigma n_t L_{\text{ass}}} \quad \Rightarrow \quad L_{\text{ass}} = \frac{1}{\sigma n_t}$$

Spesso (anche se non proprio in questo caso) è di interesse la *luminosità* del fascio, definita come:

$$\mathcal{L} = \frac{R}{\sigma} = N_t \varphi_b = N_t \frac{I_b}{\Sigma}$$

1.3.2 Collider

Introduciamo la seguente notazione:



e chiamiamo i fasci collidenti 1 e 2.

I fasci dei collider sono costituiti da “pacchetti” di particelle, disposti in “bunch”; i fasci, insomma, non sono “fotti” di particelle, e hanno una struttura temporale. Il motivo per cui i fasci vengono costruiti “a pacchetti” è che in questo modo si controllano meglio.

Si può dimostrare (non lo facciamo, perché non è semplice), che la distribuzione di particelle in un bunch è data da:

$$\frac{dn_{1,2}}{ds} = \frac{n_{1,2}}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)}$$

cioè il fascio ha una distribuzione gaussiana (in realtà questa è un'approssimazione) nelle direzioni trasversali x e y ; le due gaussiane (quella in x e quella in y) non sono però "larghe" uguali, in genere (ossia $\sigma_x \neq \sigma_y$). Pertanto il numero di particelle nell'area $dxdy$ è:

$$dn_{1,2}(x,y) = \frac{n_{1,2}}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)} dxdy$$

e la probabilità di interazione di una particella del fascio 1 col fascio 2 è:

$$P(x,y) = \frac{n_2}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)} \sigma_{\text{int}}$$

ove σ_{int} è la sezione d'urto d'interazione. Pertanto, il numero totale di interazioni sarà:

$$N_{\text{int}} = \int dn_1(x,y)P(x,y) = \sigma_{\text{int}} \frac{n_1 n_2}{4\pi^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2} \int e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)} dxdy = \sigma_{\text{int}} \frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y}$$

Vediamo dunque che più stretto è il fascio ($\sigma_x, \sigma_y \sim 0$) maggiori sono le interazioni che avvengono.

In questo caso, il rate sarà:

$$R = \frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \frac{\sigma_{\text{int}}}{k} f$$

ove k è il numero di pacchetti (le interazioni infatti avvengono se i pacchetti "si beccano") e f è la frequenza con cui si incontrano i pacchetti (ricordiamoci infatti che i fasci hanno una frequenza di rivoluzione, sono cioè periodici).

Sappiamo anche che si può scrivere $R = \sigma_{\text{int}} \mathcal{L}$, e dunque:

$$\mathcal{L} = \frac{R}{\sigma_{\text{int}}} = \frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \frac{f}{k}$$

Le interazioni fascio-fascio sono molto poche, e possiamo trascurarle per quanto riguarda l'effetto su \mathcal{L} : ciò che fa degradare \mathcal{L} sono le interazioni con le molecole residue nel collider (il vuoto che viene fatto per far funzionare il collider non è mai perfetto) e con i rivelatori. Queste determinano una diminuzione della luminosità, insomma.

Si può dimostrare (non lo vediamo) che in funzione del tempo la luminosità segue la legge:

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{L}_0}{1 + \frac{n\mathcal{L}_0\sigma_{\text{int}}}{BN} t}$$

ove B è il numero di bunch, n il numero di materiali che incontra il fascio, N il numero di particelle e \mathcal{L}_0 la luminosità iniziale (in generale si assume $n_1 \approx n_2$).

Con gli attuali collider, dopo circa 24 ore conviene fare una re-iniezione del fascio, perché la luminosità è diventata troppo bassa.

Ora, sappiamo che W è il rate di interazione per unità di particella. Nel caso dei collider, dunque, sarà ancora pari a $\sigma\phi_b$.

Fermi per primo mostrò che:

$$W = 2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E)$$

ove (n è il numero di stati finali e \vec{P} l'impulso totale):

$$\rho(E) = (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 P_i}{(2\pi)^3 2E_i} \delta\left(\sum_i E_i - E\right) \delta^{(3)}\left(\sum_i \vec{p}_i - \vec{P}\right)$$

è il volume nello spazio delle fasi relativistico (degli stati finali).

Tutto questo si basa sul fatto che il modulo della funzione d'onda non è un invariante relativistico (così come il volume), mentre il modulo della funzione d'onda diviso per l'energia è un invariante relativistico (è il motivo

della forma di ρ).

Ciò che invece descrive l'interazione è $|M_{fi}|^2$, il modulo quadro dell'elemento di matrice dell'operatore che consente la transizione fra stato iniziale e finale:

$$M_{fi} = \langle f | H_i | i \rangle$$

e si dimostra che H_i la possiamo scrivere come somma di parte relativa al centro di massa e di moto relativo al centro di massa.

Sperimentalmente, noi misuriamo σ , e sappiamo che σ è collegata, con la teoria, allo spazio delle fasi (ρ) e all'elemento di matrice (M), che deriva dal modello.

Insomma:

misuro $\sigma \Rightarrow$ calcolo $\rho \Rightarrow$ valuto $M_{fi} \Rightarrow$ verifico l'accordo fra teoria ed esperimento

Ciò che ci proponiamo di capire in questo corso è come abbiamo fatto a trarre informazioni sulla composizione della materia a partire dagli esperimenti che sono stati condotti nel corso dei decenni.

Capitolo 2

La scoperta delle particelle elementari

Nell'acceleratore LHC (che sta tornando in funzionamento in questo periodo) vengono accelerati fasci composti ognuno da 2808 bunches, distanti almeno 25 ns l'uno dall'altro. Ogni fascio contiene $1.15 \cdot 10^{11}$ protoni, ed è lungo circa 30 cm. In genere fra alcuni bunches possono esserci dei "buchi", necessari per l'ottimizzazione dell'energia utilizzabile sul fascio (misurando l'energia del singolo bunch si può capire come modificare i campi magnetici per controllarli meglio), mentre "buchi" più grandi, detti "abort gap", servono per poter "dampare" il fascio stesso (ossia disfarsene facendolo impattare contro bersagli appositamente progettati).

LHC non accelera però solo protoni, ma anche ioni pesanti come nuclei di Pb, perché la parte più moderna della fisica nucleare sfrutta collisioni di nuclei pesanti per studiare le proprietà dei nuclei, in particolare il *quark-gluon plasma*, che si pensa essere stato il primo stato della materia dopo il big bang.

I protoni o i nuclei di Pb vengono prodotti con collisioni a targhetta fissa, per essere prima accelerati a basse energie nell'acceleratore LIMAC, poi a energie più alte nel Proton Synchrotron; successivamente, vengono accelerate ad energie elevatissime nel Super Proton Synchrotron (l'acceleratore dove Rubbia ha scoperto i bosoni W^\pm e Z^0). A questo punto, i fasci vengono immessi nell'anello principale, per essere ulteriormente accelerati e poi sottoposti alle collisioni nei punti dove ci sono i rivelatori. Questi non sono altro che materia strutturata in modo ben preciso, di modo tale che misurando la perdita di energia di una particella al suo interno si può risalire alle proprietà della particella madre. In particolare, nei rivelatori si ricostruiscono le tracce delle particelle per determinarne la massa invariante.

L'elemento più importante nella costruzione di un acceleratore sono i magneti: la forza necessaria per mantenere una particella in un'orbita circolare aumenta con la velocità della particella stessa, a raggio fissato. Pertanto, ad ogni "giro" del fascio bisogna aumentare il campo magnetico, ossia la corrente che circola nelle bobine.

Per poter lavorare con grandi correnti senza dissipare troppa energia si usano elettromagneti superconduttori (a temperature molto basse); al momento il campo magnetico che si riesce a produrre nell'acceleratore è di circa 8.3 T, e quindi si riescono ad accelerare particelle fino a energie di circa 7 TeV.

In tutto LHC ci sono 1232 dipoli magnetici disposti lungo l'acceleratore: con questi si cerca di collimare il fascio all'interno del "tubo".

Ma perché abbiamo cominciato a studiare la fisica delle particelle elementari?

In questa parte di corso ripercorriamo le tappe storiche che hanno portato alle maggiori scoperte in questo campo.

2.1 Da Thomson a Rutherford

Possiamo dire che lo studio delle particelle elementari è iniziato alla metà dell'Ottocento, con lo studio dei raggi catodici; in particolare si determinò che erano deflessi da campi magnetici, con deflessione consistente con cariche negative, e hanno le stesse caratteristiche indipendentemente da come sono formati. Si suppose quindi che questi fossero composti da particelle cariche, e Thomson nel 1897 riuscì a misurarne il rapporto carica/massa, scoprendo di fatto gli elettroni. Nel 1909, poi, Millikan effettuò il famoso esperimento col quale riuscì a misurarne direttamente la carica.

Nel frattempo, in molti stavano cominciando a studiare fenomeni radioattivi: Becquerel ad esempio scoprì che i materiali fluorescenti emettono anche senza essere eccitati. Rutherford, poi, scoprì che in questi processi

vengono emessi due tipi di particelle che denominò α e β , e che le particelle β hanno le stesse proprietà degli elettroni.

Il metodo investigativo che sta alla base dello studio della materia è partito sostanzialmente dall'esperimento di Rutherford.

La tecnica utilizzata da Rutherford è sostanzialmente identica a quelle attualmente usate negli acceleratori, con la differenza che ad oggi i collider sono molto più diffusi di esperimenti a targhetta fissa.

Ciò che Rutherford scoprì è che alcune particelle α lanciate contro un sottile foglio d'oro e con energie di circa 5.5 MeV venivano deflesse moltissimo, o addirittura riflesse all'indietro. Fu con questo esperimento, come sappiamo, che il modello atomico di Rutherford divenne quello universalmente accettato per la descrizione della struttura atomica.

Durante lo studio della struttura dell'atomo, Rutherford postulò anche l'esistenza del neutrone, ossia che l'atomo fosse composto anche da particelle neutre di massa simile a quella del protone.

Ora, nel '30 Bethe e Becker notarono che particelle alpha incidenti su del Berillio producevano una radiazione in grado di superare 200mm di Piombo; nel '32 Irene Joliot-Curie osservò che facendo incidere la radiazione su della paraffina venivano prodotti protoni. Chadwick, studente e poi collaboratore di Rutherford, misurò la velocità di questi protoni, deducendo che la radiazione studiata non poteva essere composta da particelle di massa nulla. Si trattava proprio dei neutroni.

2.2 I raggi cosmici

Già dalla fine del '700 Coulomb notò che l'elettroscopio si scaricava spontaneamente.

Dopo la scoperta della radioattività si trovò che un rivelatore, anche se completamente schermato, presentava comunque un segnale, che venne attribuito a della radiazione fortemente penetrante, che fu dimostrato avere origine extra-terrestre. Rossi dimostrò poi che questa radiazione è composta da particelle cariche.

Negli anni '30 Yukawa, tentando di capire come protoni e neutroni possano essere legati nel nucleo, propose che i nucleoni interagissero con un nuovo campo, che risultava avere raggio d'azione cortissimo, e con un mediatore che doveva avere massa di circa 200 MeV.

Si cercò dunque di andare a capire se qualcosa di simile poteva essere trovata nei raggi cosmici, e nel '37 Anderson e Neddermeyer con una camera a nebbia in campo magnetico misurarono la massa di una particella, che determinarono essere compresa fra quella dell'elettrone e del protone, che venne chiamata *mesotrone*.

Durante la guerra Conversi, Pancini e Piccioni mostrarono che queste particelle non interagivano molto con i nuclei atomici (usarono dei nuclei leggeri, in particolare di carbonio), come invece ci si sarebbe aspettato per le particelle di Yukawa. Nel '40, infatti, Tomonaga e Araki avevano predetto che le particelle di Yukawa di carica positiva e negativa avrebbero dovuto avere comportamenti molto diversi: le particelle negative, infatti, avrebbero dovuto rallentare per poi essere assorbite dal nucleo, mentre quelle positive avrebbero dovuto rallentare e successivamente decadere, senza essere assorbite.

Dopo la fine della guerra, Perkins usò delle emulsioni nucleari e le mise a bordo di aerei della RAF per essere portate ad alta quota: in questo modo riuscì ad evidenziare una particella con le caratteristiche della particella di Yukawa.

Nello stesso periodo Lattes, Powell e Occhialini fecero un esperimento con emulsioni nucleari sui Pirenei francesi e determinarono l'esistenza di due particelle di massa non molto diversa, una delle quali decade nell'altra. La più pesante di queste, il *pione* π , è effettivamente la particella di Yukawa, mentre l'altra è il *muone* μ , particella che non mostrava un'interazione nucleare significativa

2.3 I mesoni K

Negli anni '40, una volta individuata la particella di Yukawa si pensava che il quadro delle particelle che costituiscono la materia fosse concluso: si pensava infatti di conoscere i costituenti del nucleo e dell'atomo, nonché il mediatore della forza forte.

Studiando i raggi cosmici, con un esperimento condotto sulle Alpi si scoprì (con la solita procedura, ossia lo studio di emulsioni) che in realtà nella radiazione cosmica esiste un'altra particella, con massa di circa 500 MeV. Più o meno in contemporanea negli USA si scoprì che una particella con massa simile decade in diversi

pioni.

All'epoca i tipi di tracce presenti nelle camere vennero divisi in due categorie:

V: una particella carica che decade in un'altra particella carica e delle particelle neutre. Questo tipo di particelle erano dette *particelle θ* :

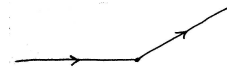


Figura 2.1: Traccia di tipo V

(la particelle neutre sono invisibili perché non ionizzano l'emulsione)

V_0 : una particella neutra decade in due particelle cariche. Questo tipo di particelle erano dette *particelle τ* :

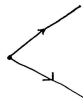


Figura 2.2: Traccia di tipo V_0

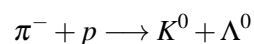
(come prima, le particelle neutre sono invisibili)

Ci volle una decina d'anni per capire che θ e τ sono in realtà la stessa particella che decade in modo diverso: questa particella è il *mesone K*. Ovviamente, può essere carico (con carica positiva o negativa) o neutro: c'è insomma un'intera famiglia di mesoni *K*.

Qualche anno più tardi si osservò che c'era sempre una produzione associata di particelle instabili, ossia i *K* non sono "singoli" (in processi del tipo $\pi \rightarrow \mu$, invece, si vede una sola traccia isolata). Studiando dettagliatamente le tracce dei *K* si notò che questi venivano sempre prodotti in coppie con altre particelle, che però non avevano sempre le stesse caratteristiche; queste particelle, che hanno massa leggermente maggiore di quella del *K* e decadono in nucleoni e pioni, sono dette *iperoni*. Studiando gli iperoni, si notò che si comportano in modo "strano" rispetto ai pioni, i nucleoni, i μ e in generale le altre particelle allora note; le loro stranezze erano principalmente due:

1. sono prodotte in coppie
2. sono prodotte molto "velocemente" (tipico dei processi regolati dall'interazione forte), ossia la loro sezione d'urto è molto grande, ma il loro decadimento è "lento", ossia hanno vite medie molto lunghe (tipico dei processi regolati dall'interazione debole)

Non si era mai vista fino ad allora una differenza fra il modo in cui una particella è prodotta e quello in cui decade. Nishima e Geldman proposero la seguente spiegazione: la differenza osservata è dovuta a un nuovo numero quantico S , finora ignorato, detto *stranezza*; si tratta di un numero quantico additivo (come la carica), e l'idea è che questo si conservi nelle interazioni forti. Se per ora ad esempio poniamo uguale a $+1$ la stranezza dei mesoni K^1 , mentre 0 quella delle particelle "normali", allora considerando il processo:



si vede bene perché le particelle devono essere prodotte in coppia: lo stato iniziale ha stranezza nulla e quindi anche quello finale deve avere $S = 0$ (se supponiamo che la stranezza si conservi nel processo), pertanto oltre al K^0 , che è una particella strana, dovrà essere prodotta anche un'altra particella (in questo caso Λ^0) con stranezza -1^2 .

Se però consideriamo il decadimento di un mesone *K*, ad esempio $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, vediamo che la stranezza non è conservata (è 1 nello stato iniziale e nulla in quello finale): il decadimento dei mesoni *K* è dunque dovuto

¹Per ora prendiamo per buona questa cosa, poi vedremo per bene come funziona.

²Ovviamente, se conoscessimo il modello a quark "salterebbe tutto fuori" gratuitamente.

a un'interazione diversa da quella forte, ed è proprio per via della violazione della conservazione della stranezza che il loro decadimento è molto lento.

Per riassumere, le caratteristiche principali dei mesoni K sono:

	carica	stranezza	massa	vita media
K^+	+1	+1	494 MeV	12 ps
K^0	0	+1	498 MeV	???
\bar{K}^0	0	-1	498 MeV	???
K^-	-1	-1	494 MeV	12 ps

Tabella 2.1: Caratteristiche dei mesoni K

(vedremo poi perché la vita media del K^0 e del \bar{K}^0 non è definibile).

Per concludere, abbiamo bisogno anche della stranezza per caratterizzare completamente una particella, oltre a tutti gli altri numeri quantici.

2.4 La storia dei leptoni

Come sappiamo, il pione decade nel processo a catena $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$.

Con studi molto dettagliati, Conversi, Pancini e Piccioni determinarono che il μ “si comporta” come l'elettrone, rientrando nella famiglia dei leptoni.

Esiste poi un terzo leptone, il τ , scoperto in un'interazione del tipo:

$$e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-$$

e si determinò anche che il τ decade secondo:

$$\tau^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e + \nu_\tau \qquad \tau^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu + \nu_\tau$$

Ora, perché esistono tipi diversi di neutrini?

Si cominciò a pensare che così come esistono tre diversi leptoni potessero esistere tre diversi tipi di neutrini, che cominciarono a essere studiati sistematicamente con l'avvento dei reattori nucleari: si usarono infatti i neutrini prodotti nei reattori per farli collidere con targhette, in reazioni del tipo $\nu + p \rightarrow e^+ + n$ (che è lo stesso processo del decadimento β^+). Con studi di questo tipo si cercò di caratterizzare i neutrini, scoprendo ad esempio che in realtà i neutrini hanno massa.

Se si fanno urtare protoni contro atomi di Be si producono moltissimi pioni, che sappiamo decadere in muoni e neutrini; si notò che i neutrini prodotti in questo modo quando interagiscono con la materia hanno una caratteristica peculiare, ossia fra i prodotti di questa interazione ci sono *sempre* muoni, e mai elettroni.

Analogamente, se si fanno urtare i neutrini prodotti dal decadimento dei π^\pm contro nucleoni si ottengono *sempre* pioni e mai elettroni. Ciò significa che i neutrini si “ricordano” con chi sono stati prodotti, o in altre parole i vari neutrini sono particelle diverse fra loro (ossia sono diversi stati quantistici, con diversi numeri quantici).

Ci deve insomma essere un nuovo numero quantico che si conserva in questi processi: è il *sapore leptonico*.

Si ha:

	\mathcal{L}_e	\mathcal{L}_μ	\mathcal{L}_τ
e	1	0	0
ν_e	1	0	0
μ	0	1	0
ν_μ	0	1	0
τ	0	0	1
ν_τ	0	0	1

Tabella 2.2: Sapori leptonici

Ad oggi, il sapore leptonico è sempre stato visto conservarsi. Esistono teorie nuove che permettono di passare dalla scala elettrodebole a energie più alte che prevedono che il sapore leptonico possa non essere conservato.

2.5 Simmetrie

Come sappiamo, il teorema di Noether collega le simmetrie della lagrangiana di un sistema con leggi di conservazione.

Le simmetrie, poi, si dividono in continue e discrete, e quelle che ci interesseranno maggiormente sono quelle discrete.

In generale, può accadere che il numero quantico associato a una simmetria sia additivo (come la carica) o moltiplicativo.

Le simmetrie che analizzeremo sono le seguenti tre:

P: parità

C: coniugazione di carica

T: inversione temporale

2.5.1 Parità

Come noto l'operatore di parità è quello che cambia segno alle coordinate spaziali, ossia $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, pertanto si ha anche:

$$t \longrightarrow t \qquad \vec{p} \longrightarrow -\vec{p} \qquad \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow \vec{r} \times \vec{p} \qquad s \longrightarrow s$$

(ove s è lo spin). È chiaro dunque cosa sia la parità per un sistema di più particelle; un po' più oscuro è invece il significato di parità di una singola particella.

In generale, la *parità intrinseca* di una particella è definita a partire dal sistema di riferimento di quiete della particella stessa. Per il fotone, ad esempio, si determina la parità a partire dalle caratteristiche del campo elettromagnetico (ossia dalle proprietà di parità del campo elettromagnetico), e risulta $P(\gamma) = -1$. Infatti il fotone è la particella più semplice possibile per la quale possiamo determinare la parità, perché conosciamo esplicitamente l'espressione del campo elettromagnetico, e il comportamento del campo sotto parità è sostanzialmente quello del suo mediatore. Poiché il campo elettromagnetico si comporta come un vettore, allora ha parità negativa, e quindi $P(\gamma) = -1$.

Per convenzione, poi, si pone $P(p) = +1$, e a partire da ciò si cerca di ricavare la parità di tutte le altre particelle (si può dimostrare che questo è effettivamente possibile, ma non lo facciamo).

Spesso si usa indicare (come abbiamo visto in fisica nucleare) lo stato di una particella con il suo momento angolare totale e la sua parità con la notazione J^P ; nel caso del fotone dunque si ha uno stato 1^- .

Ad oggi, sappiamo che:

- la parità dei fermioni è opposta a quella degli anti-fermioni³
- le parità dei bosoni e degli anti-bosoni coincidono

Consideriamo ora un sistema di due particelle. Come possiamo determinarne la parità? Chiamiamo $|p, \ell, m\rangle$ lo stato del sistema (con p impulso), e supponiamo che le parità intrinseche delle due particelle siano P_1 e P_2 . Se il sistema è isolato, necessariamente $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, e ponendo $\vec{p}_1 = \vec{p}$ possiamo esprimere $|p, \ell, m\rangle$ nella base $|p, -p\rangle$ come:

$$|p, \ell, m\rangle = \sum_{\theta, \varphi} Y_m^{\ell}(\theta, \varphi) |p, -p\rangle$$

Sotto parità, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ e $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$ e quindi:

$$P|p, \ell, m\rangle \rightarrow P_1 P_2 (-1)^\ell |p, \ell, m\rangle$$

³Fra poco vedremo cosa sono le antiparticelle.

Supponendo dunque che il sistema sia composto da due bosoni, $P_1 = P_2$ e quindi la parità va come $(-1)^\ell$, mentre se è composto da fermioni $P_1 = -P_2$ e quindi la parità va come $(-1)^{\ell+1}$.

Se quindi ad esempio supponiamo che uno stato iniziale decada in due fotoni, e che la parità del sistema si conservi nel processo, allora la parità dello stato iniziale dovrà essere $+1$.

2.5.2 Coniugazione di carica

Mentre venivano studiate le proprietà della parità delle particelle venne introdotto un nuovo operatore, la *coniugazione di carica* C , perché in processi che coinvolgono interazioni elettromagnetiche la carica è conservata (vedremo più tardi che C manda una particella nella sua antiparticella). Per capire meglio il ruolo della coniugazione di carica partiamo da un altro punto.

Storicamente, si cercò di coniugare la meccanica quantistica con la relatività speciale (ossia con l'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz). Con l'equazione di Klein-Gordon il problema è risolto, ma manca la componente di spin della funzione d'onda. Nel '28 Dirac propose una soluzione partendo da degli stati fondamentali, detti "spinori", che includono anche lo spin. Nella soluzione della sua equazione, però, Dirac si accorse che esistevano delle soluzioni con energie positive e con energie negative; cercò dunque di capire cosa fossero queste soluzioni con energia negativa, ed è così che Dirac arrivò a proporre il concetto di *antiparticella*. Applicando l'equazione al campo elettromagnetico, Dirac pensò che la soluzione con $E < 0$ fosse relativa al protone (quella con $E > 0$ si sapeva corrispondere all'elettrone). Ci si rese conto però che applicando l'operatore C all'equazione di Dirac la soluzione con $E < 0$ doveva avere massa identica a quella della soluzione con energia positiva: pertanto l'antiparticella dell'elettrone non può essere il protone. È così che nel '31 Dirac propose l'esistenza del *positrone*, particella identica all'elettrone ma di carica opposta.

Bisognava a questo punto verificare questa supposizione.

Si pensò di cercare tracce del positrone nei raggi cosmici: vennero dunque fatte molte ricerche in questo senso, e nel '33 Anderson notò in un esperimento che oltre a delle tracce consistenti con elettroni ce n'erano altre di "simmetriche":

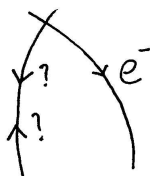


Figura 2.3: Tracce osservate

Facendo riferimento alla figura, la seconda traccia o proviene "dall'alto" ed ha carica positiva, oppure viene "dal basso" con carica negativa.

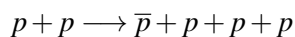
Usando quindi dei pezzi di ferro per misurare con più accuratezza la perdita di energia della particella, si determinò che effettivamente questa proveniva "dall'alto", ed aveva quindi carica positiva (oltre alla stessa massa dell'elettrone): il positrone era stato trovato sperimentalmente.

Anche Occhialini, qualche anno dopo, giunse alle stesse conclusioni.

A questo punto, però, che ne è delle altre particelle?

Già col protone si presentano dei problemi che l'elettrone non ha: il protone, infatti, non è puntiforme. Ci si chiese quindi se le antiparticelle esistano effettivamente per tutte le particelle, come suggerirebbe l'applicazione dell'operatore di coniugazione di carica all'equazione di Dirac.

Considerando sempre il protone, non si riusciva a trovare sperimentalmente l'anti-protone nei raggi cosmici⁴. Si cominciò dunque a sfruttare la tecnologia degli acceleratori: a Berkeley, in California, venne costruito il bevatrone (il nome deriva da "billions of eV"), nel quale delle particelle venivano accelerate ad energie di circa 7 GeV in collisioni a targhetta fissa. La reazione studiata era del tipo:



⁴In realtà più recentemente sono stati trovati, ma sono pochissimi e presenti solo fuori dall'atmosfera.

Facendo i conti nel sistema di riferimento del centro di massa, si vede che effettivamente serve un'energia circa 7 volte maggiore della massa del protone, ossia proprio circa 7 GeV.

Lo schema dell'apparato sperimentale usato è il seguente:

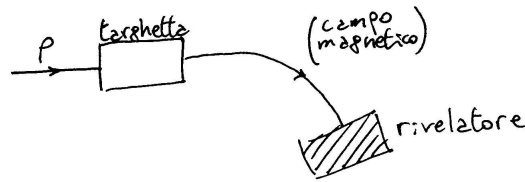


Figura 2.4: Schema dell'apparato usato per rilevare \bar{p}

Il problema è che in processi del genere si producono anche pioni, e dobbiamo essere in grado di distinguerli dagli antiprotoni; il rivelatore è dunque abbastanza complicato, e sfrutta la relazione fra impulso relativistico e velocità per determinare con precisione la massa di una particella.

In questo modo venne effettivamente trovato sperimentalmente l'antiprotono.

Fu chiaro, dunque, che tutte le particelle hanno la propria antiparticella; C è pertanto un operatore che effettivamente trasforma una particella nella sua antiparticella, come avevamo già accennato.

Si può dimostrare che $C|\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle$, che è hermitiano e ha autovalori ± 1 . Pertanto, la coniugazione di carica introduce un nuovo numero quantico, che rappresentiamo nella notazione usuale come J^{PC} .

2.5.3 Invarianza temporale

Si tratta della simmetria che cambia segno al tempo, ossia $T : t \rightarrow -t$.

La meccanica classica *non* è invariante sotto T (si pensi ad esempio al secondo principio della termodinamica). Per le interazioni fondamentali, però, ciò può non essere vero; i seguenti processi sono ad esempio perfettamente equivalenti:

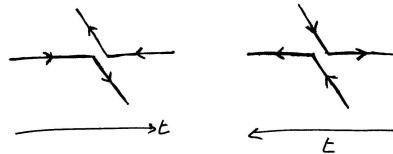


Figura 2.5: Processi fisicamente equivalenti

2.5.4 La simmetria CPT

C , P e T vengono in genere incorporati in un unico operatore, CPT (l'ordine di applicazione non è rilevante).

Esiste un teorema, il *teorema CPT*, secondo il quale la simmetria CPT è *sempre* conservata; a oggi non è mai stata osservata una violazione di CPT .

Una conseguenza importante della simmetria CPT è che una particella e la propria antiparticella non solo hanno la stessa massa, ma anche la stessa vita media.

Recentemente è stato dimostrato che una possibile violazione di CPT implicherebbe una violazione dell'invarianza di Lorentz.

Sperimentalmente si osserva che C e P sono conservate in tutte le interazioni tranne quella debole. Fino a poco tempo fa si credeva che C e P non fossero singolarmente conservate, ma la loro azione congiunta CP sì. In realtà si determina che anche CP è violata; dunque, o T è violata e CPT si conserva, oppure T si conserva e CPT è violata.

Ad oggi non si conosce la risposta definitiva a questo problema.

2.5.5 Altre simmetrie

Esistono altre due conservazioni che non analizzeremo: quella del numero leptonico e quella del numero barionico. In particolare, i numeri quantici conservati sono:

$$B = N(\text{barioni}) - N(\text{antibarioni}) \quad \mathcal{L} = N(\text{leptoni}) - N(\text{antileptoni})$$

da notare che i tre numeri leptonici \mathcal{L}_e , \mathcal{L}_μ e \mathcal{L}_τ sono tutti conservati separatamente (mentre il numero barionico è unico).

2.6 Il modello a quark

2.6.1 Le risonanze

Il concetto di risonanza è importantissimo per poter giungere alla formulazione del modello a quark. Per *risonanza* si intende che in un processo d'urto a determinate energie si "massimizza" l'energia trasmessa, così come in un oscillatore armonico, ad esempio, a determinate frequenze si massimizza la potenza trasferita sull'oscillatore stesso.

Supponiamo di avere un processo del tipo $a + b \rightarrow c + d + e + f$; si può dimostrare (non lo facciamo) che la sezione d'urto $\sigma(E)$ del processo in funzione dell'energia E si può scrivere come:

$$\sigma(E) = \frac{2J+1}{(2S_a+a)(2S_b+1)} \frac{4\pi}{E^2} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E - M_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

nota come *formula di Breit-Wigner*, ove:

- E è l'energia nel centro di massa
- M_R è la massa (o meglio, l'energia) della risonanza
- J è lo spin della risonanza
- Γ_i e Γ_f sono, rispettivamente, la larghezza parziale⁵ degli stati iniziale e finale
- Γ è la larghezza della risonanza
- S_a e S_b sono lo spin di a e b nello stato iniziale

Se dunque si fanno collidere delle particelle e si va a vedere il numero di oggetti prodotti in funzione dell'energia dello stato iniziale, si trova qualcosa del tipo:

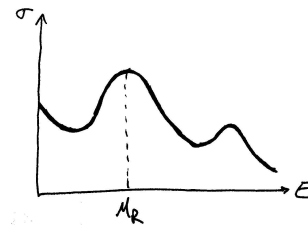


Figura 2.6: Risonanza

ove i picchi corrispondono proprio a delle risonanze. Ciò significa che in risonanza a e b hanno interagito in modo tale da formare una nuova particella, ossia l'interazione fra a e b è tale che in corrispondenza di quella data energia si formi un nuovo stato legato, ossia una nuova particella⁶.

⁵Non è l'indeterminazione energetica degli stati, ma una caratteristica intrinseca degli stati. Si può dimostrare che è l'inverso della vita media dello stato.

⁶Storicamente, si trovarono risonanze come quelle in figura 2.6 studiando processi del tipo $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$, e si capì che in corrispondenza di questi picchi delle nuove particelle erano state formate.

Il problema che si presentò storicamente è che con studi di questo tipo ci si trovò di fronte a una situazione veramente caotica, ovvero si trovò una quantità spropositata di particelle; ciò portò a dubitare che tutte queste potessero essere elementari. In particolare, si trovarono:

- 9 mesoni pseudoscalari
- 9 mesoni vettoriali
- 8 barioni $J^P = 1/2^+$
- 9 barioni $J^P = 3/2^+$

2.6.2 I quark

Nel tentare di costruire un modello che cerchi di spiegare la natura delle particelle, è evidente che questo “bestiario” è troppo vasto.

Nel '64 Zweig e Geldman ipotizzarono l'esistenza di particelle ancora più piccole, i *quark*, che costituiscono tutte le particelle osservate. In particolare, si ipotizzò che i mesoni fossero costituiti da un quark e un antiquark, mentre i barioni da tre quark, ossia:

$$\text{mesoni} \longrightarrow q\bar{q} \qquad \text{barioni} \longrightarrow qqq$$

Geldman e Zweig pensarono tre quark, detti *up*, *down* e *strange*, che fossero in grado di riprodurre tutte le particelle osservate, giungendo alle seguenti conclusioni:

	Q	J	J_z	S
up	2/3	1/2	1/2	0
down	-1/3	1/2	-1/2	0
strange	-1/3	0	0	-1

Tabella 2.3: Quark ipotizzati da Geldman e Zweig nel '64

In questo modo si ha, ad esempio⁷:

$$\begin{aligned}
 p &= uud & n &= udd & \pi^- &= d\bar{u} & \pi^+ &= u\bar{d} & \pi^0 &= u\bar{u} + d\bar{d} \\
 K^+ &= s\bar{u} & K^- &= u\bar{s} & K^0 &= d\bar{s} & \bar{K}^0 &= s\bar{d}
 \end{aligned}$$

e si riuscì effettivamente a riprodurre tutte le particelle osservate. È dunque un modello potenzialmente molto efficace.

Sorse però immediatamente un problema: fra tutte le molte particelle note al tempo ce n'è una, Ω^- , che si determinò sperimentalmente essere un fermione. Col modello a quark, però, si prevedeva $\Omega^- = sss$, e facendo i conti risulta che la funzione d'onda di questa particella è simmetrica, andando contro il principio di Pauli. Il problema si risolve introducendo un nuovo numero quantico per i quark, in modo da ristabilire l'antisimmetria di questa funzione d'onda; questo numero quantico è il *colore*.

Negli anni '60 e '70, all'LHC si studiarono processi di questo tipo:

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu} \qquad K^+ \longrightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$$

ove il primo è detto *processo di corrente neutra* e il secondo *di corrente carica* (scrivendo per bene le interazioni è infatti possibile definire una corrente, in analogia con l'elettromagnetismo).

⁷Il senso di tutto questo è: i quark sono delle particelle, e dunque sono descritti da una determinata funzione d'onda; pertanto si prova a combinare più quark insieme e a vedere se le caratteristiche che derivano da questa combinazione di quark corrispondono effettivamente a quelle osservate.

Secondo le conoscenze dell'epoca sulle interazioni deboli, ci si aspettava che questi processi avessero un "branching ratio" molto simile, ove il branching ratio è definito come:

$$BR = \frac{\Gamma_f}{\Gamma}$$

Sperimentalmente risultò:

$$BR(K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}) \approx 1.5 \cdot 10^{-10} \quad BR(K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu) \approx 5 \cdot 10^{-2}$$

e non c'era alcuna spiegazione valida del perché la corrente neutra fosse così soppressa rispetto a quella carica. Si ipotizzò dunque l'esistenza di un quarto quark, che interagisce in modo diverso nei due processi considerati. Con quest'ipotesi, le ampiezze di decadimento calcolate erano effettivamente in accordo con gli esperimenti. Questo nuovo quark venne detto *charm*, con un nuovo numero quantico (lo charm, appunto) costruito per rendere conto delle evidenze sperimentali.

Bisognava però verificare se effettivamente questo quark esistesse oppure no. Negli anni '70 negli USA Ting diresse degli esperimenti per studiare processi del tipo:

$$p + N \rightarrow e^+ + e^- + X$$

ove N è un nucleone, e X particelle qualunque: in altre parole, si studiano solo gli stati finali che contengono un elettrone e un positrone.

L'apparato sperimentale era, schematicamente:

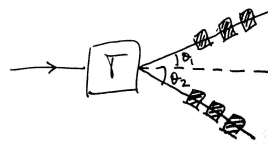


Figura 2.7: Schema dell'apparato sperimentale

ove i rivelatori venivano posizionati ad hoc per poter identificare le particelle volute. Variando la struttura dell'apparato si poteva variare lo spettro delle energie osservate.

Tenendo conto che la massa invariante di e^+ e e^- è:

$$m(e^+e^-) = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}$$

risultò:

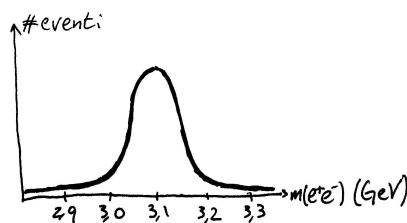


Figura 2.8: Risultati sperimentali

Si osservò dunque una risonanza, ossia nel processo era stata creata una nuova particella, che Ting chiamò J .

Contemporaneamente, in un esperimento diretto da Richter sempre negli USA si studiarono processi del tipo:

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + X \quad e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^- + X$$

(o comunque in generale si studiarono processi con degli adroni come prodotti finali), facendo variare l'energia degli elettroni e dei positroni fra circa 2 e 7 GeV. Risultò:

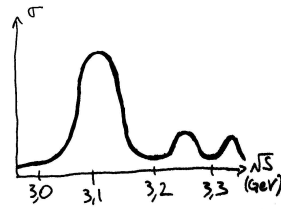


Figura 2.9: Risultati sperimentali

Era dunque stata trovata un'altra particella, che Richter chiamò Ψ , che decade in modi diversi. È però uguale alla particella J trovata da Ting.

Storicamente ci fu una grande discussione fra Ting e Richter su chi avesse il merito della scoperta, e alla fine si decise di chiamare la particella J/Ψ .

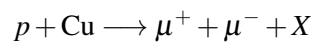
Ora, usando la formula di Breit-Wigner si può calcolare la larghezza dello stato della J/Ψ :

$$\sigma(E) \approx \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E - M_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

e risulta che lo stato della J/Ψ è molto poco largo; il problema è che cercando di scrivere la funzione d'onda con i quark allora noti non si riusciva a riprodurre la larghezza. Si pensò dunque che la J/Ψ potesse essere composta da uno charm e un anticharm, stato legato detto *charmonio* (analogo del positronio). Studiando nuovamente processi di urto fra elettroni e positroni e sondando regioni energetiche più ampie si trovarono altre particelle, dette Ψ' , Ψ'' , che non sono altro che stati eccitati della J/Ψ ; ciò che risultò è che gli stati energetici di queste particelle hanno la stessa distribuzione dei livelli energetici del positronio. La Ψ'' , però, presenta un'anomalia: ha uno stato un po' più largo degli altri; il motivo lo si colse più tardi: si capì che esistono dei mesoni, detti D , contenenti quark charm e tali che J/Ψ e Ψ' non possono decadere in essi, mentre la Ψ'' sì. È per questo che J/Ψ e Ψ' hanno stati più stretti della Ψ'' .

Insomma, a questo punto erano noti quattro quark: up, down, strange e charm.

Nel '77-'78, però, Lederman studiò processi del tipo:



trovando:

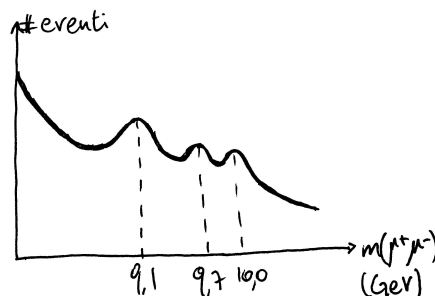


Figura 2.10: Risultati sperimentali

Studiando questa nuova particella detta Y , si determinò che ha uno stato molto stretto e che non può essere formato da questi soli quattro quark. La sua spiegazione è possibile solo introducendo un nuovo quark, il *bottom* (o *beauty*), di modo tale che Y sia composta da un bottom e da un antibottom, ossia sia un *bottomio*. Anche in questo caso si trovarono altre particelle (Y' , Y'' ecc.) che riproducono un comportamento simile al positronio e alla J/Ψ . In particolare, Y'' ha uno stato più largo perché anche stavolta né Y né Y' possono decadere in determinati mesoni contenenti bottom.

A questo punto poteva sembrare che si riproponesse una situazione simile a quella iniziale (ossia che i quark potessero diventare troppi), ma non furono trovati altri quark.

C'è però un inghippo teorico, ossia a questo stadio i quark non sono a coppie:

carica				
	$2/3$	u	c	?
	$-1/3$	d	s	b

Ciò è un problema non solo perché questa ha l'aria di una “simmetria incompleta”, ma anche perché come avevamo visto esistevano tre tipi di leptoni e neutrini, e quindi sarebbe molto “intrigante” se anche i quark si dividessero in tre tipi.

Per ristabilire questa “simmetria” venne dunque postulata l'esistenza di un nuovo quark, il *top*. Ci sono voluti però moltissimi anni per osservarlo (venne trovato nel '95 osservando processi del tipo $p + \bar{p} \rightarrow t + \bar{t} + X$); il motivo di questo ritardo diventa chiaro se si considerano le masse dei quark:

$$\begin{array}{lll}
 u \rightarrow 3 \text{ MeV} & c \rightarrow 1.3 \text{ GeV} & t \rightarrow 170 \text{ GeV} \\
 d \rightarrow \approx 5 \text{ MeV} & s \rightarrow 100 \text{ MeV} & b \rightarrow < 5 \text{ GeV}
 \end{array}$$

Il top era dunque difficilissimo da osservare perché estremamente pesante!

Il quark top, inoltre, decade secondo $t \rightarrow W^+ + b$, e ha una vita media $\tau \approx 10^{-25}$ s, a cui corrisponde $\Gamma \approx 1.5 \text{ GeV}$.

A oggi non sappiamo perché il quark top sia così pesante.

In generale, i quark sono soggetti al “confinamento”, ossia si trovano *sempre* in uno stato legato⁸. Il top ha però una vita media talmente breve da decadere prima di potersi legare con altri quark (non *adronizza*); insomma, sperimentalmente non esistono stati legati con un quark top. Questo è inoltre l'unico quark che si può osservare libero, e dimostra direttamente l'esistenza dei quark.

⁸Se si prova a “separarli”, si legano con altri quark.

Capitolo 3

Le interazioni fondamentali

Lo strumento principale per descrivere le interazioni fra particelle sono gli *integrali di Feynmann*, che però non calcoleremo mai esplicitamente.

3.1 Trattazione quantistica dell'elettromagnetismo

Sappiamo che la carica elettrica è sempre conservata. Ma come lo si può determinare sperimentalmente? Possiamo farlo, ad esempio, misurando la vita media dell'elettrone. L'unica cosa in cui potrebbe decadere un elettrone sono fotoni (l'elettrone è la particella carica più leggera ad oggi nota), ma necessariamente in un processo del genere non si conserva la carica, se supponiamo conservata l'energia. Insomma, misurando la vita media dell'elettrone possiamo porre un "limite" alla validità della conservazione della carica. Ad oggi, sappiamo che $\tau_e > 4 \cdot 10^{26}$ anni.

Sappiamo poi che in elettromagnetismo classico la conservazione della carica è espressa dall'equazione di continuità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Descrivendo l'elettromagnetismo in formalismo relativistico, invece, sappiamo che possiamo esprimere i campi con i potenziali \vec{A} e ϕ , e che possiamo trasformarli secondo:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \qquad \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

senza alterare i campi (invarianza di gauge).

In elettrodinamica quantistica, si può vedere che analogamente la funzione d'onda di una particella può trasformare secondo:

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\chi} \psi$$

e che l'invarianza di gauge non è altro che l'invarianza della lagrangiana del campo elettromagnetico sotto il gruppo $U(1)$.

3.1.1 I diagrammi di Feynman

Negli anni '50 la descrizione quantistica relativistica dell'elettromagnetismo riusciva a descrivere abbastanza bene le interazioni fra oggetti carichi. Si cominciò poi a studiare molto dettagliatamente la separazione dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno: in particolare l'esperimento di Lamb (quello che mostrò il cosiddetto "Lamb shift") fu quello che diede nuovo impulso alla teoria, permettendo l'introduzione dei diagrammi di Feynman. Questi non sono altro che diagrammi con i quali schematizzare l'interazione fra particelle, e calcolare la probabilità dell'interazione rappresentata.

Quando un elettrone interagisce con un nucleo atomico, possiamo rappresentare la situazione in questo modo:

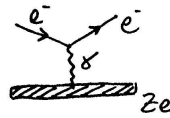
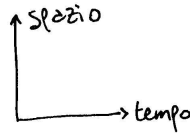


Figura 3.1: Rappresentazione interazione elettrone-nucleo

Nel disegnare i diagrammi di Feynman si usa la seguente convenzione:



Il diagramma che abbiamo appena visto rappresenta proprio il nucleo che emette un fotone, facendo cambiare impulso all'elettrone. Il punto in cui avviene l'interazione è detto "vertice" del diagramma. Oltre a questo diagramma di Feynman ne possiamo vedere molti altri. Ad esempio, un elettrone libero nel vuoto può essere rappresentato da:

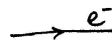


Figura 3.2: Rappresentazione di un elettrone in diagrammi di Feynman

Può accadere, però, che sempre nel vuoto un elettrone emetta un fotone e lo "riassorba":

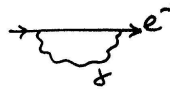


Figura 3.3: Autoassorbimento di un fotone

Ancora, può succedere che un fotone nel vuoto crei una coppia $e^+ + e^-$ ("polarizzazione del vuoto"):

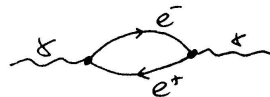


Figura 3.4: Polarizzazione del vuoto

(ci torneremo meglio, ma il verso delle particelle e antiparticelle è una convenzione).

Poiché fenomeni del genere avvengono nel vuoto, dobbiamo tenerne conto nella descrizione dell'interazione elettrone-nucleo, ossia si può anche avere:

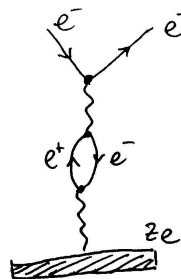


Figura 3.5: Interazione elettrone-nucleo con polarizzazione del vuoto

(l'elettrone in questo caso può interagire anche col campo elettromagnetico generato da se stesso).

I risultati dell'esperimento di Lamb vengono spiegati proprio introducendo questo tipo di fenomeni nell'intera-

zione elettrone-nucleo.

C'è però un problema: nei vertici dei diagrammi di Feynman l'energia non si conserva; se chiamiamo ΔE la quantità di energia "persa", questa violazione è "tollerabile" se compatibile col principio di indeterminazione di Heisenberg, ossia se $\Delta E \Delta t \leq \hbar$, con Δt durata del fenomeno.

Insomma, anche il vuoto e le particelle stabili in realtà non sono in equilibrio "statico", ma "dinamico".

Da un punto di vista quantistico, risulta che la lagrangiana del campo elettromagnetico deve essere sviluppata in serie, e ogni diverso diagramma (ad esempio quelli relativi all'autoassorbimento di un fotone, o alla polarizzazione del vuoto) corrisponde a un diverso termine dello sviluppo.

Nei diagrammi di Feynman, come abbiamo visto, le particelle sono rappresentate da linee, sulle quali le frecce indicano il flusso dei numeri quantici (è per questo che le antiparticelle vanno "indietro nel tempo"):



Figura 3.6: Rappresentazioni delle particelle nei diagrammi di Feynman

Inoltre, nei diagrammi che abbiamo disegnato finora alcuni fotoni sono rappresentati verticali, ossia (teoricamente) propagantisi a velocità infinita. Ciò ovviamente non è vero, e la notazione deriva dal fatto che, ad esempio, le due seguenti situazioni sono perfettamente equivalenti da un punto di vista di calcolo:



Figura 3.7: Diagrammi equivalenti

e pertanto sono collettivamente "incluse" nella rappresentazione:



Figura 3.8: Rappresentazione dei due precedenti diagrammi

Nel calcolare i diagrammi di Feynman, ai vertici viene associata un'hamiltoniana di interazione, che contiene operatori quantistici ed è proporzionale a $z\sqrt{\alpha}$, ove z è la carica della particella e α la costante di struttura fine.

Consideriamo il processo:

$$e^- + \mu^- \longrightarrow e^- + \mu^-$$

ossia uno scattering elastico fra elettrone e muone; lo si può rappresentare in questo modo:

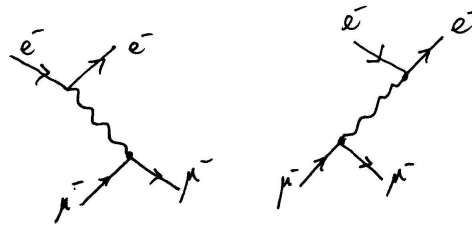


Figura 3.9: Scattering elettrone-muone

e, al fine della determinazione della probabilità dell'interazione, questi due diagrammi sono perfettamente equivalenti.

Questo tipo di diagrammi sono detti “ad albero”, e computazionalmente sono i più semplici che si possano trattare. A ordini più elevati le cose, ovviamente, si complicano:

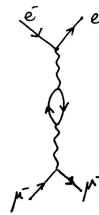


Figura 3.10: Scattering elettrone-muone con polarizzazione del vuoto

Ci aspettiamo, poi, che al crescere dell'ordine considerato il contributo diventi più piccolo; ciò accade effettivamente nell'elettrodinamica quantistica, ma non nella cromodinamica.

3.1.2 Propagatore di un campo

Consideriamo il seguente processo:

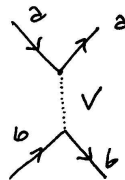


Figura 3.11: Situazione considerata

ove V è il mediatore, o *propagatore*, del campo responsabile dell'interazione. In generale, $m_V \neq 0$; risulta che $\Delta E = m_V c^2$ (ove ΔE ha lo stesso significato di prima). Il propagatore avrà dunque tempo di vita Δt , con $\Delta E \Delta t \leq \hbar$; poiché si tratta del mediatore di un campo, la massima distanza che potrà percorrere è $R = c \Delta t = \hbar / \Delta E = \hbar / m_V c^2 = \hbar / m_V c$, che quindi è il raggio d'azione del campo¹.

Il grande problema della fisica contemporanea è che non riusciamo a determinare diagrammi di Feynmann per la gravità.

3.1.3 Risonanze e costante di struttura fine

Riconsideriamo il primo diagramma che abbiamo visto, tenendo conto anche delle varie grandezze in gioco:

¹Notiamo anche che c'è accordo con quello che sappiamo classicamente: il fotone ha massa nulla, e pertanto il range d'interazione del campo elettromagnetico è infinito.

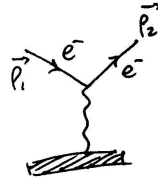


Figura 3.12: Situazione considerata

allora $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ è l'impulso trasferito dal nucleo all'elettrone.
In forma relativistica:

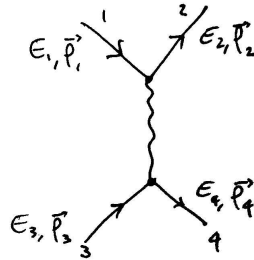


Figura 3.13: Processo considerato

e $q^2 = (E_2 - E_1)^2 - (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2$ è il quarimpulso trasferito nel processo; in questo caso q^2 può essere anche negativo (a seconda del tipo di processo). Se dunque al quadrimpulso associamo la massa del mediatore possiamo avere mediatori "immaginari" (ossia di massa negativa).

Consideriamo ora il processo:

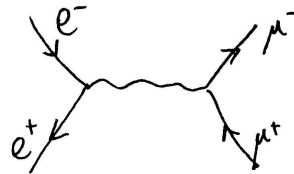


Figura 3.14: Annichilazione elettrone-muone

(ossia un'annichilazione $e^+e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$)². Quando il q^2 , ossia l'energia nel centro di massa, arriva ad avere il valore della massa di una particella esistente, il sistema incontra una risonanza e può produrre nuove particelle (come la J/Ψ), ognuna con una diversa probabilità (ci sono più diagrammi che contribuiscono), e la somma dei valori dei diagrammi dà la probabilità totale di creare una nuova particella; talvolta però accade che alcuni fenomeni "interferiscano" fra loro.

In QED sorgono alcuni problemi legati a delle divergenze nei valori della massa o carica di particelle. Per quello che riguarda la carica di una particella, ciò che si fa è di definire una carica "nuda", infinita ma

²Processo equivalente è lo scattering $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$:

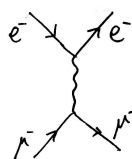


Figura 3.15: Processo fisico equivalente

non osservabile, e una “effettiva” misurabile. Si inseriscono poi nella lagrangiana della QED dei termini che permettono di eliminare delle divergenze. Considerando ad esempio un’annichilazione $e^+ + e^-$, la situazione è “pittoricamente” la seguente:

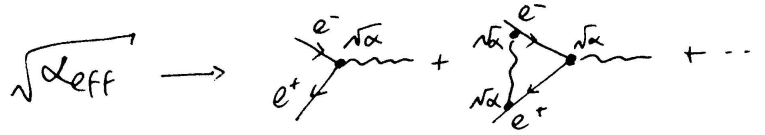


Figura 3.16: Termini da considerare

ove α è la costante di struttura fine “nuda” (è la cosiddetta “costante di accoppiamento” dell’interazione elettromagnetica)³. L’importanza dei termini a ordini superiori aumenta all’aumentare dell’energia dei fotoni virtuali; insomma, “avvicinandosi” alla carica si includono termini superiori.

Possiamo capire questo fenomeno con un’analogia classica: consideriamo una carica, che a priori sappiamo che ha un determinato valore, in un dielettrico. Il dielettrico allora si polarizzerà; per determinare il valore della carica, dovremo lanciarcì contro una carica di prova e studiare come interagisce con la carica da misurare. Ciò che accade è che, a seconda di dove passa questa carica di prova, si misurerà un diverso valore della carica, per via dell’effetto di schermo del dielettrico. Insomma, in teoria ci sarebbe una carica ben definita, ma misurandola non possiamo determinarne esattamente il valore, possiamo solo individuare una carica efficace, che dipende dall’energia della carica di prova.

Nel vuoto accade più o meno la stessa cosa: se una carica si trova nel vuoto, per via della polarizzazione del vuoto si creeranno più coppie elettrone-positrone (che poi annichilano) che si comportano come il dielettrico, polarizzandosi.

Facendo dunque esperimenti di scattering con una carica nel vuoto non possiamo misurare il valore “esatto” della carica, ma il suo valore efficace che dipende dall’energia della carica di prova. Insomma, α in realtà non è una costante, ma dipende da q^2 (quadrimpulso):

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)}$$

ove μ^2 è una costante di scala delle dimensioni di un’energia; si tratta sostanzialmente di una costante che entra in gioco nella rinormalizzazione ed è determinabile solo sperimentalmente.

Tutto ciò è stato verificato sperimentalmente, misurando $\alpha^{-1}(q^2)$ in fenomeni del tipo $e^+ + e^- \rightarrow f + \bar{f}$, ove f è un fermione. Risulta:

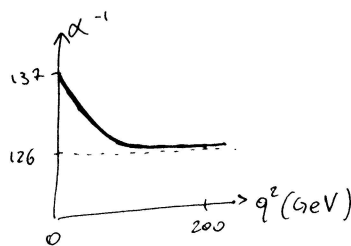


Figura 3.17: Risultati sperimentali

3.2 Teoria delle interazioni forti

La *quantum chromodynamics* (QCD) è nata come conseguenza dello studio delle interazioni nucleari, e si è evoluta anche grazie a rinnovate tecniche sperimentali.

³In generale, una costante di accoppiamento è un numero che determina l’intensità della forza esercitata in un’interazione. Di solito, la lagrangiana o l’hamiltoniana di un sistema che descrive un’interazione particella-particella può essere separata in un termine cinetico e uno di interazione; la costante di accoppiamento determina l’intensità della parte di interazione rispetto a quella cinetica.

Nello studio di interazioni del tipo $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, col miglioramento delle tecniche sperimentali si è riusciti ad aumentare l'energia disponibile nel centro di massa, rendendo possibili reazioni del tipo $e^+ + e^- \rightarrow$ adroni; a un certo punto però, aumentando l'energia, gli eventi osservati nei rivelatori hanno “cambiato forma”:

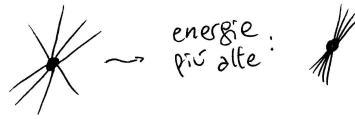


Figura 3.18: Osservazioni sperimentali

(il disegno è fatto nel piano trasverso alla direzione di volo delle particelle incidenti).

Insomma, gli adroni non vengono emessi uniformemente, ma in direzioni precise dello spazio, dette “jets”. All’aumentare dell’energia, poi, compaiono nuovi jets. Da dove derivano?

Si capì che il processo di formazione dei jet avviene in due fasi: il processo $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$ (ove q è un generico quark) e l’adronizzazione dei quark.

La prima fase è un processo che sappiamo descrivere con i diagrammi di Feynman (ossia sappiamo scriverne la lagrangiana), mentre l’adronizzazione è un processo non perturbativo, ossia non sappiamo come descriverlo con strumenti di meccanica quantistica standard.

I quark prodotti nella prima fase, però, possono irradiare un gluone (così come un elettrone irradia un fotone), che a sua volta può decadere in una coppia quark-antiquark (“gluon splitting”), che a loro volta possono emettere gluoni e così via. Insomma:

$$g \rightarrow q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q} + g_1 + g_2 \rightarrow q + \bar{q} + q_1 + \bar{q}_1 + q_2 + \bar{q}_2 \rightarrow \dots$$

Questo processo, ovviamente, prosegue finché energeticamente possibile; dopodiché i quark creati nel processo finiscono in uno stato legato (adronizzano), anche se non sappiamo come ciò accada, nel senso che non esiste ancora una descrizione analitica del processo; esistono però modelli in grado di descrivere sistemi del genere, basati su simulazioni Monte Carlo. Esiste anche tutta una modellistica in grado di descrivere bene ciò che si osserva (anche se ci sono ancora diversi problemi).

Nel caso dell’interazione elettromagnetica, la forza diminuisce all’aumentare della distanza, e pertanto per “allontanare” due cariche di segno opposto basta compiere sufficiente lavoro.

Nel caso dei quark la situazione è completamente diversa, perché l’interazione fra cariche di colore avviene tramite il gluone, che ha un comportamento piuttosto atipico, perché il gluone stesso è portatore di carica di colore (al contrario ad esempio del fotone, che non è elettricamente carico); ciò che accade è che quando si “allontanano” due oggetti con carica di colore, l’energia del sistema aumenta a tal punto che diventa conveniente per il sistema “spaccarsi” e formare due nuovi stati legati. Pertanto, non si possono allontanare due quark tra di loro oltre una certa distanza; è questo il *confinamento* al quale sono soggetti i quark.

Quello appena visto è uno dei modelli che permette di spiegare la formazione dei jet: infatti, quando i quark vengono prodotti nella collisione elettrone-positrone hanno del momento, e quindi inizialmente si allontanano fra loro; appena la loro distanza reciproca supera un certo limite, adronizzano creando particelle. Finché l’energia nel centro di massa è bassa, l’adronizzazione è spazialmente uniforme; se però l’energia è sufficientemente elevata l’adronizzazione avviene “intorno” al quark prodotto inizialmente. Considerando la seguente situazione:

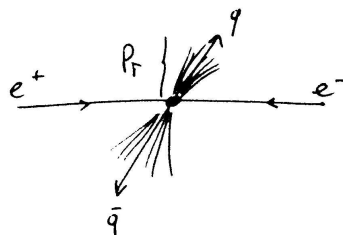


Figura 3.19: Situazione considerata

e detto P_T l'impulso trasverso dei quark prodotti e P quello totale, si può dimostrare che:

$$\frac{P_T}{P} \approx \frac{1}{\sqrt{s}} \approx \theta$$

ove θ è l'angolo di apertura del jet (s è l'energia nel centro di massa). Pertanto, se s è piccolo l'angolo di apertura del jet è molto grande, e quindi non si riescono a identificare. Quando invece s è sufficientemente grande (circa maggiore di 30 GeV) l'angolo di apertura diventa di qualche grado, rendendo visibili i jet.

In generale, si parla di "gluoni soffici" quando sono irradiati da quark, e sono quelli che danno origine ai jet attorno ai quark primari; si possono però avere anche "gluoni duri", che ad esempio sono quelli che danno origine ai nuovi jet, aumentando l'energia:

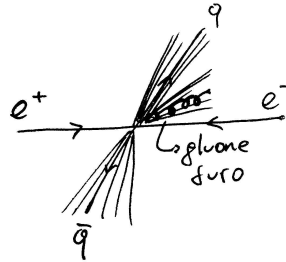


Figura 3.20: Creazione di un jet da parte di un gluone duro

Alcuni jet, insomma, possono essere iniziati da dei gluoni, con impulso trasverso sufficientemente elevato da fare in modo che i quark emessi dal gluone non adronizzino con i quark dei jet primari. Sperimentalmente non è possibile distinguere i jet prodotti dai quark da quelli prodotti da gluoni; si possono però raccogliere dati relativi a molti jet e cercare di studiarne statisticamente le caratteristiche comuni.

Ordinando i jet in energia, risulta che nella maggior parte dei casi il jet con energia minore è quello prodotto dal gluone (quello che a energie minori non esiste). Si prende dunque l'asse del primo e del secondo jet e si va a vedere come è posizionato il terzo jet rispetto a quest'asse:

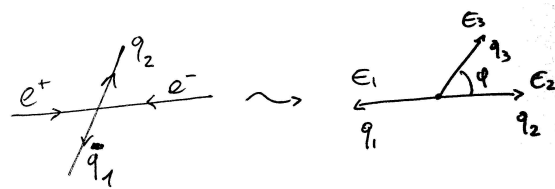


Figura 3.21: Situazione considerata

Ciò che si fa è studiare la distribuzione spaziale di particelle in $\cos \varphi$, che sappiamo calcolare per particelle scalari (di spin zero) e vettoriali (di spin uno). Confrontando il risultato dei calcoli con gli esperimenti risulta che i dati sono perfettamente descritti dal caso di particelle vettoriali. In questo modo si dimostra che il jet è un oggetto a spin 1, ed essendo generato dal gluone in questo modo si mostra che il gluone è una particella con spin 1.

3.2.1 La carica di colore

Da dove nasce l'esigenza della carica di colore?

Storicamente, si cercava di misurare la grandezza:

$$R = \frac{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-)}$$

Se non consideriamo il colore, ci si aspetterebbe:

$$R = \sum_i q_i^2$$

ove q_i sono le cariche elettriche dei quark coinvolti. Per $\sqrt{s} < 4$ GeV si possono creare i quark u , d e s , e ci si aspetterebbe dunque $R = 6/9$, mentre sperimentalmente $R = 6/3$: c'è un fattore 3 che ci manca. Analogamente, per $\sqrt{s} < 10$ GeV si possono creare u , d , s e c , pertanto ci si aspetterebbe $R = 10/9$, mentre si misura $R = 10/3$. Insomma, sommare sulle sole cariche elettriche non è sufficiente: lo stato finale deve avere una proprietà aggiuntiva che renda conto di questo fattore 3 mancante. Questa proprietà è esattamente la carica di colore: supponendo che esistano tre cariche di colore, ogni quark può esistere in tre diverse "versioni", e dunque bisogna sommare anche su questi numeri quantici.

È in questo modo, insomma, che è stata introdotta la carica di colore.

3.2.2 Il modello dinamico dei nucleoni

In contemporanea a tutto questo in California venne costruito un acceleratore volto a studiare la struttura di protoni e neutroni.

Aumentando l'energia dei fasci si capì che la sezione d'urto di produzione (ossia il conto di quante particelle vengono prodotte per dati angoli ed energie) può essere scritta come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE} \right)^{\text{ptiforme}} W(Q^2, \nu)$$

ove la sezione d'urto puntiforme è quella di tipo Rutherford, mentre Q^2 è il quadrimpulso trasferito e $\nu = E - E'$ è la differenza fra le energie iniziali e finali.

In termini di diagrammi di Feynman:

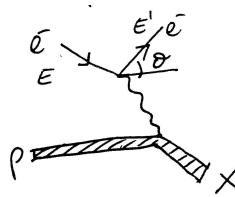


Figura 3.22: Deep inelasting scattering

e il processo è del tipo $e^- + p \rightarrow e^- + X$ (detto "deep inelastic scattering").

L'oggetto W cominciò ad essere studiato al variare dell'energia, e si scoprì che questo "fattore di forma" ha le stesse proprietà di quello di un oggetto che sbatte contro un bersaglio singolo, che però cambia.

Insomma, il fotone emesso dall'elettrone interagisce con uno degli oggetti che costituiscono il nucleo, detti (quando il modello a quark non era stato ancora proposto) *partoni*. Ogni volta il fotone emesso dall'elettrone interagisce con un partone diverso, e W descrive complessivamente la somma di questi effetti. Il fattore W fu studiato in dettaglio, con esperimenti studiati appositamente (ad esempio in urti protone-neutrone a energia variabile).

Insomma, possiamo pensare anche che W descriva la distribuzione dei quark all'interno di un nucleone.

Ora, detta x la frazione d'impulso del partone che interagisce col fotone, ciò che si trovò è:

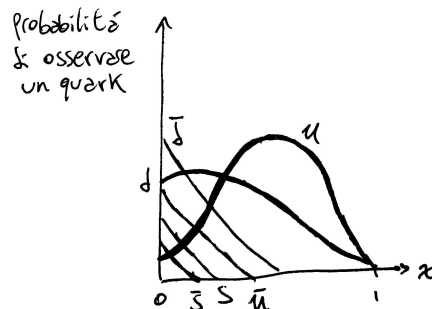


Figura 3.23: Risultati sperimentali

Considerando solo u e d , la somma delle loro frazioni non dà 1: c'è insomma qualcosa che non torna. Potremmo allora pensare che ci siano fenomeni di QCD analoghi alla polarizzazione del vuoto; includendo anche \bar{u} e \bar{d} i conti però continuano a non tornare, anche includendo i quark s . Insomma, il sistema nucleone è un sistema dinamico, e il fotone emesso dall'elettrone può interagire talvolta con un quark charm presente nel nucleone, talvolta con un quark strange e così via. Questi quark "aggiuntivi" sono detti "quark del mare": sono coppie quark-antiquark che derivano dalla polarizzazione del vuoto. Ciò che però risulta è che comunque il totale che si può ricavare includendo tutti i possibili contributi, non è 1 ma circa 0,5; metà di quello che stiamo osservando deriva da altro: i gluoni. Insomma, in realtà un nucleone è un sistema dinamico composto da molti tipi di quark, e fatto per la maggior parte da gluoni.

3.2.3 Costante di accoppiamento dell'interazione forte

Consideriamo ora l'equivalente di α_{emg} per l'interazione forte, α_s . Considerando quello che abbiamo visto nel caso di α_{emg} , ci aspettiamo che anche in questo ci saranno effetti analoghi alla polarizzazione del vuoto, che complessivamente determinano un effetto di schermo della carica di colore. In termini di diagrammi di Feynman, avverrà qualcosa del tipo:

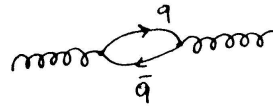


Figura 3.24: Polarizzazione del vuoto $q\bar{q}$

(detta "polarizzazione $q\bar{q}$ "). Il gluone però ha esso stesso colore, e pertanto potrà interagire con sé stesso:



Figura 3.25: Polarizzazione del vuoto con gluoni

Insomma, in QCD possiamo avere effetti di polarizzazione del vuoto con gluoni. L'effetto complessivo di questi fenomeni è che lo screening dovuto alla polarizzazione $q\bar{q}$ viene compensato, anzi surclassato da quello relativo alla polarizzazione gluone-gluone. Ciò che quindi accade è che in questo caso la α_s osservata sarà *maggiore* di quella nuda. In particolare si determina che:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi} (33 - 2n_f) \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)}$$

ove n_f è il numero di sapori di quark che si possono produrre a quella data energia (q^2). Si tratta di una relazione praticamente identica a quella elettromagnetica, a parte la presenza del +. Spesso, si definisce un'altra costante, λ_{QCD} , come:

$$\lambda_{QCD} = \mu^2 \exp\left(\frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\alpha_s(\mu^2)}\right)$$

di modo che:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln\left(\frac{q^2}{\lambda_{QCD}}\right)}$$

La costante λ_{QCD} è una grandezza determinabile sperimentalmente, e definisce nella QCD due range energetici piuttosto importanti:

- $E < \lambda_{QCD}$: in questo caso α_s è piuttosto grande, e siamo in un regime non perturbativo, ossia quello dove avvengono processi come l'adronizzazione, che non sono descrivibili analiticamente

- $E > \lambda_{QCD}$: in questo caso α_s è piuttosto piccolo, e siamo in un regime perturbativo (dove i processi sono descrivibili analiticamente)

Tuttavia, λ_{QCD} dipende da n_f , ossia dipende essa stessa dall'energia del processo (per $n_f = 3$ si ha $\lambda_{QCD} \approx 400$ MeV, mentre $\lambda_{QCD} \approx 200$ MeV per $n_f = 4$).

Come si può prevedere il suo valore? Nel regime perturbativo possiamo farlo "tranquillamente" (a meno di difficoltà di calcolo) perché siamo in grado di scrivere il diagramma di Feynman del processo. Nell'altro regime, invece, si usano metodi basati su simulazioni, o comunque in generale metodi numerici.

In questo modo si può anche cercare di stimare le masse dei quark (ad esempio, u e d hanno massa piccola e quindi si trovano nel regime non perturbativo, mentre dal c in poi siamo nell'altro regime).

Risulta:

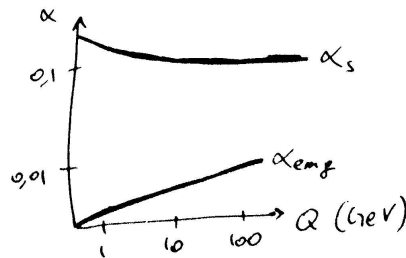


Figura 3.26: Confronto dei valori delle costanti di accoppiamento elettromagnetica e forte

3.3 Teoria delle interazioni deboli

Questo tipo di interazione si chiama così perché è "schermata" da quelle forte ed elettromagnetica. Sono state scoperte perché sperimentalmente si trovarono processi altrimenti inspiegabili.

Per sua natura, l'interazione debole non è in grado di creare stati legati.

Quando Fermi cominciò a studiare questo tipo di interazione, suppose che si trattasse di un'interazione puntiforme regolata da una costante G_F ; nel caso elettromagnetico e forte, le costanti di accoppiamento α_{emg} e α_s sono adimensionali, mentre G_F non risultava tale.

Insomma, si partì da una situazione nella quale non esisteva ancora il concetto di propagatore per l'interazione debole.

Considerando la formulazione moderna dell'interazione debole, i propagatori di questa forza sono tre: W^+ , W^- e Z^0 . Se il propagatore è carico si parla di processi di "corrente carica", altrimenti di "corrente neutra".

I quark sono soggetti alle interazioni forte e debole (oltre che quella elettromagnetica), mentre i leptoni massivi a quelle elettromagnetica e debole; le uniche particelle che interagiscono solo attraverso l'interazione debole sono i leptoni non massivi, ossia i neutrini.

I processi deboli vengono generalmente divisi in tre categorie:

Processi leptonici come:

$$- \mu^- \longrightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

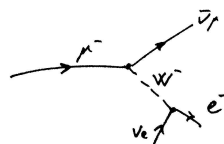


Figura 3.27: Diagramma di Feynman del processo leptonic considerato

$$- \nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_e + \mu^-$$

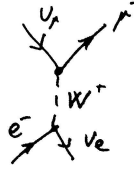


Figura 3.28: Diagramma di Feynman del processo leptonic considerato

$$- \nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^-$$

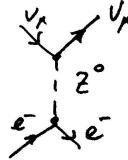


Figura 3.29: Diagramma di Feynman del processo leptonic considerato

Processi semi-leptonici come ad esempio il decadimento β , ossia $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. In termini di quark:

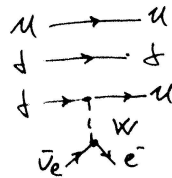


Figura 3.30: Decadimento β dal punto di vista dei quark

Ciò che accade in questo caso è che i vertici dei diagrammi di Feynman non sono semplicemente proporzionali alla costante di accoppiamento G dell'interazione debole, e G dipende comunque dal sapore dei quark coinvolti. Alla fine risulta che il processo è descritto da una matrice (la *matrice CKM*) che “mescola” gli stati dei quark

Processi non leptonici come il decadimento $\Lambda^0 \longrightarrow p + \pi^-$:

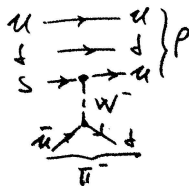


Figura 3.31: Diagramma di Feynman del processo non leptonico considerato

Notiamo poi che l'interazione debole *non* conserva il sapore dei quark.

Per lungo tempo le interazioni deboli erano state pensate e elaborate in modo tale da poter spiegare processi come quelli osservati. Tuttavia, per anni lo sviluppo di queste teorie è stato ostacolato dal fatto che si credeva che l'interazione debole, come tutte le altre note, dovesse conservare tutte le simmetrie. Risulta infatti che l'interazione debole viola sistematicamente alcune di queste.

Quando abbiamo introdotto la stranezza, abbiamo visto che vennero trovate due particelle (che poi in realtà si scoprirono essere la stessa), θ e τ :

$$\theta^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \qquad \tau^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

(e fintanto che non si introduce il quark s il fenomeno è inspiegabile). In contemporanea a questo venivano studiati anche i decadimenti:

$$\theta^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \qquad \tau^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

ove θ^+ e τ^+ sono in realtà K^+ ; in effetti, studiando queste particelle risulta che sono la stessa particella (hanno stessa massa e vita media). Tuttavia, studiando la distribuzione angolare di questi decadimenti si determina che la parità del primo è positiva mentre quella del secondo negativa. Insomma, abbiamo due decadimenti deboli della stessa particella ma con parità diverse: sembra che la parità non si conservi nel decadimento. Ci fu dunque un lunghissimo dibattito, ma ricontrollando anche esperimenti già fatti in passato non se ne trovò uno in cui la parità sia conservata. Bisognava insomma capire perché la parità in processi deboli è *sempre* violata.

L'esperimento che dimostrò univocamente la violazione della parità fu effettuato dalla Wu in decadimenti β di atomi di ^{60}Co . In quest'esperimento non si capì solo che effettivamente la parità è violata, ma anche come deve essere fatto l'operatore matematico che descrive l'interazione debole. Si scoprì poi anche che i neutrini emessi nel decadimento hanno elicità (prodotto scalare fra spin e velocità) negativa e gli antineutrini positiva; poiché i neutrini hanno elicità diverse, ciò significa che anche C è violata (perché C non coinvolge l'elicità). Le interazioni deboli, dunque, violano singolarmente C e P ; Landau dimostrò però che CP sarebbe dovuta essere conservata, ma qualche anno dopo si determinò che in realtà anche questa simmetria è violata. Tornando all'esperimento della Wu, si è sostanzialmente andati a vedere la distribuzione degli elettroni emessi dal ^{60}Co , e risultò che questa è tale per cui il processo che causa il decadimento viola massimamente P . Nel decadimento del cobalto la situazione dal punto di vista dello spin è la seguente, per la conservazione del momento angolare (che l'interazione debole non viola):

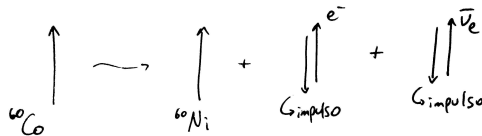


Figura 3.32: Momento angolare delle particelle coinvolte nel decadimento studiato dalla Wu

Inoltre, elettrone e antineutrino hanno sempre impulsi opposti, e tali che l'elettrone ha momento antiparallelo al suo spin, mentre l'antineutrino parallelo.

Introduciamo l'*elicità*:

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p}$$

ove \vec{p} è l'operatore impulso e $\vec{\sigma}$ di spin. Pertanto, il neutrino ha elicità sempre negativa, e l'antineutrino positiva. Se infatti consideriamo i decadimenti del μ^+ e μ^- :

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \qquad \mu^+ \longrightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

si ha che queste reazioni sono l'una la coniugata di carica dell'altra. Ciò che si determina, però, è che le elicità di elettrone e positrone sono opposte, e pertanto per la conservazione del momento anche neutrino e antineutrino hanno elicità opposte. Pertanto, C non è conservata (perché C non dovrebbe alterare l'elicità di una particella). Dobbiamo però dimostrarlo con un esperimento. A questo proposito venne studiato il decadimento del Sm , e si riuscì a dimostrare che neutrino e antineutrino hanno sempre elicità definita, in particolare negativa per il neutrino e positiva per l'antineutrino.

3.3.1 Mescolamento dei quark e oscillazioni di stranezza

Consideriamo i diagrammi di Feynman dei decadimenti del μ^- e del neutrone:

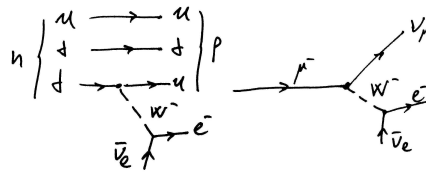


Figura 3.33: Decadimenti del neutrone e del μ^-

Se l'interazione debole fosse universale, le costanti di accoppiamento coinvolte nei due processi dovrebbero essere le stesse; tuttavia questo non accade.

Il decadimento del neutrone è una transizione nella quale la stranezza non cambia; venne studiato anche il decadimento $\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, nel quale la stranezza varia, in particolare $\Delta s = 1$:

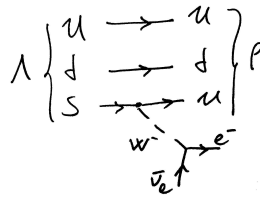


Figura 3.34: Decadimento del Λ

(in questo processo infatti compare un quark s , al contrario di prima).

Se l'interazione debole fosse universale, dunque, ci aspetteremmo che i range di questi processi siano gli stessi (tenendo conto anche dei termini correttivi non-perturbativi dovuti al fatto che il tutto avviene all'interno di una particella).

Cabibbo e altri studiarono i decadimenti $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ e $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, che sono analoghi a quelli appena visti, ma più semplici e con meno quark coinvolti.

Facendo il conto supponendo che l'interazione sia universale, i range risultano uguali, e sperimentalmente sono processi facili da studiare. Risultò tuttavia:

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = 1.34$$

C'è dunque un problema, ossia $\Gamma(\Delta s = 0) \neq \Gamma(\Delta s \neq 0)$. Cabibbo ipotizzò dunque che i quark, in particolare s e d , non entrino nell'interazione "così come sono". Ad esempio, nel caso del decadimento del neutrone il quark che entra in gioco non è semplicemente d , ma:

$$d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c$$

(ove $\theta_c \approx 13^\circ$ per rendere conto dei risultati sperimentali).

In altre parole, gli autostati della lagrangiana forte (i quark) *non* sono gli autostati dell'interazione debole.

Quello che abbiamo appena visto è applicato a processi di corrente carica; tuttavia, d' dovrà entrare in gioco anche nelle correnti neutre.

Ciò che risulta in questo caso è che nella lagrangiana compare una parte con $\Delta s \neq 0$. Sperimentalmente, studiando i processi con $\Delta s = 0$ e di corrente neutra si scopre che quelli con $\Delta s = 0$ sono altamente soppressi, ossia non avvengono praticamente mai. Ad esempio $K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu_e + \bar{\nu}_e$ è un processo di corrente neutra, mentre $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ carica; si determina che $BR(cc) \approx 10^{-2}$ ("BR" sta per "branching ratio" e "cc" per "corrente carica"), e ci aspetteremmo una cosa analoga per la corrente neutra, mentre $BR(cn) \approx 10^{-10}$.

Il problema si risolve se si introduce un nuovo doppietto:

$$s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c$$

Per creare un nuovo doppietto rispetto a $(\begin{smallmatrix} u \\ d' \end{smallmatrix})$ dobbiamo introdurre un nuovo quark, lo charm, di modo da creare il doppietto $(\begin{smallmatrix} c \\ s' \end{smallmatrix})$. Facendo il conto con questo nuovo doppietto risulta proprio che i processi di corrente

neutra sono soppressi. È mentre si studiava tutto questo che negli USA si studiarono le risonanze $e^+ + e^-$, che portarono alla scoperta sperimentale dello charm.

Insomma, nella descrizione delle interazioni deboli si deve usare la “base”:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

è dunque coinvolta una matrice reale di rotazione.

Il sistema si complica notevolmente, però, se si include anche la presenza del quark beauty; sembra dunque che non si abbia a che fare con due doppietti, ma 3. Insomma, si dovrebbe avere qualcosa del tipo:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{ud} & v_{us} & v_{ub} \\ v_{cd} & v_{cs} & v_{cb} \\ v_{td} & v_{ts} & v_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

ove la matrice 3×3 è detta *matrice CKM*. Gli elementi di questa matrice sono quelli che regolano le varie transizioni fra quark; il problema è che sono parametri che la teoria non prevede, e vanno misurati sperimentalmente.

La matrice CKM è unitaria, e i suoi elementi sono complessi: dovremmo insomma misurare 18 grandezze, ma imponendo l'unitarietà queste si riducono a 9.

Si può dimostrare che di queste 9 quantità 3 sono reali, e le altre 6 sono delle fasi, e 5 di queste possono essere “riassorbite” nella definizione di fase della funzione d'onda del sistema. Alla fine, dunque, abbiamo 4 grandezze da misurare.

Fino ad adesso sono state misurate quasi tutte, e sappiamo che gli elementi sulla diagonale valgono circa 1, mentre allontanandosi dalla diagonale tendono a zero.

Di tutte queste grandezze, la fase che non si riesce ad eliminare è la “responsabile” della violazione di *CP*.

Per comprendere meglio la violazione di *CP*, consideriamo un processo particolare che coinvolge K^0 . Il K^0 è composto da \bar{s} e d , mentre \bar{K}^0 da s e \bar{d} . Queste due particelle si distinguono per come vengono prodotte:

$$K^+ + n \longrightarrow K^0 + p \qquad K^+ + p \longrightarrow \bar{K}^0 + n$$

Ora, $CP(|K^0\rangle) = |\bar{K}^0\rangle$ e viceversa. Insomma, sono due stati quantistici diversi (al contrario ad esempio del π^0 , che coincide con la propria antiparticella). I mesoni K^0 e \bar{K}^0 hanno stranezza definita, e come abbiamo appena visto *non* sono autostati di *CP*; siamo dunque costretti a considerare due nuovi stati:

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \qquad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

che sono autostati di *CP* relativi, rispettivamente, agli autovalori $+1$ e -1 .

Risulta poi $\tau_{K_1} \ll \tau_{K_2}$; ciò è dovuto al fatto che il K_2 non può decadere in due pioni (altrimenti violerebbe *CP*), quindi può decadere solo in tre pioni, e lo spazio delle fasi raggiungibile nello stato finale è molto piccolo; pertanto, il K_2 ha una vita media lunga.

Gellmann e Pais supposero che se effettivamente K^0 e \bar{K}^0 sono fatti in questo modo, e nei decadimenti deboli entrano in gioco K_1 e K_2 e i processi deboli permettono “salti” di stranezza, allora sono possibili processi detti *oscillazioni di stranezza*.

Supponiamo dunque di avere al tempo $t = 0$ un fascio di K^0 ; per descriverne l'evoluzione dobbiamo applicare l'operatore di evoluzione temporale a K_1 e K_2 . Riscrivendo:

$$K^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \qquad \bar{K}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0\rangle - |K_2^0\rangle)$$

vogliamo sapere a $t = t'$ quanti K^0 sono rimasti nel fascio, e lo si fa proiettando la funzione d'onda $\psi(t)$ del sistema al tempo t su K^0 :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0(t)\rangle + |K_2^0(t)\rangle) \qquad |K_1^0(t)\rangle = e^{-im_1 t - \frac{\Gamma_1}{2} t} |K_1^0(0)\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\langle K^0 | \psi(t) \rangle|^2 = I(K^0) = \frac{1}{4} \left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \cos(\Delta m t) \right)$$

ove $\Delta m = m_2 - m_1$ (il caso dell' \bar{K}^0 è analogo, con -2 al posto di $+2$). Insomma, si parte con un fascio di K^0 , ma nell'evoluzione temporale del fascio il contenuto di K^0 oscilla.

La stranezza non è dunque definita all'interno del fascio, e ciò può essere verificato sperimentalmente.

3.3.2 Violazione di CP

Nel '63 Christenson e altri studiarono i decadimenti di K_2 in due, non tre, pioni; lo scopo era verificare che il K_2 non può decadere in due pioni, o meglio porre un limite superiore a questa possibilità. Per farlo hanno generato un fascio di K^0 sparando su del berillio protoni di impulso pari a circa un GeV. Poiché $\tau_{K_1} \ll \tau_{K_2}$, dopo un po' tutti i K_1 sono decaduti (in particolare, dopo circa 6cm il contenuto di K_1 può essere considerato nullo). Pertanto, l'esperimento era collocato a 15 metri dal punto di produzione⁴.

In realtà vennero osservati dei decadimenti $K_2 \rightarrow \pi + \pi$, completamente inaspettati. Insomma, sorse il sospetto che CP fosse violata.

In particolare, fra i vari decadimenti osservati quelli in tre corpi si eliminano imponendo due condizioni: la complanarità delle traiettorie dei π col fascio emesso e la massa invariante circa uguale a quella del K_2 . Poiché in studi del genere non sappiamo com'è fatto il fondo, ciò che si fa è studiare anche zone vicine a quelle dove ci si aspetta il segnale (dette "side bands"). Se il decadimento fosse a due corpi, per energie comparabili con la massa del K_2 ci si aspettano molti eventi con $\theta \approx 0$, ed è ciò che è stato effettivamente osservato.

Ora, K_2 , che ha $CP = -1$, non può decadere in due pioni se CP è conservata: pertanto, necessariamente CP non è conservata nell'interazione debole (non è massimamente violata, ma è comunque violata).

Possiamo dunque "cambiare" nuovamente la "base", definendo K_{long}^0 e K_{short}^0 (e la base non è "diversissima" da quella precedente perché CP non è massimamente violata).

Si è poi capito che la violazione di CP deriva, come già accennato, dalla matrice CKM, e in particolare dalla fase che abbiamo detto non essere eliminabile; questa entra in gioco in particolari decadimenti (come quelli osservati), e in modo diverso a seconda dei casi (si parla di diversi "tipi" di violazione di CP).

3.4 Unificazione elettrodebole

Il formalismo vero e proprio dell'interazione debole nacque quando si capì che i processi di corrente neutra possono essere "unificati" con i processi elettromagnetici. Questo modello venne sviluppato da Glasgow, Salam e Weinberg prima, e da Feynman e 't Hooft poi.

Nello scrivere il formalismo dell'interazione debole, si suppose che all'inizio, poco dopo il Big Bang, la natura potesse essere descritta da quattro campi, espressione di un'unica forza, quella *elettrodebole*. I propagatori di questi campi vengono detti W_1 , W_2 , W_3 e B ; il tutto interagisce con un altro campo, il *campo di Higgs*, che "mantiene tutto in equilibrio". Questi però non sono i campi fisici che noi vediamo oggi (mediati da W^+ e W^- , combinazioni lineari di W_1 e W_2 , e da Z^0 e γ , combinazioni lineari di W_3 e B).

Quando l'energia scende sotto una certa soglia, il sistema non è più in equilibrio ("la simmetria si rompe"), nel modo descritto dal meccanismo di Higgs: i bosoni inizialmente interagiscono con bosoni intermedi, e alla fine "escono" i vari bosoni vettori, dei quali il fotone è l'unico a rimanere senza massa (tutto ciò è conseguenza di come sono stati pensati i campi).

I campi "iniziali" hanno proprietà simili alla QCD, ossia i loro propagatori possono interagire fra loro.

Le correnti neutre deboli ed elettromagnetiche sono simili, in quanto non cambiano il sapore.

Lo Z^0 non si accoppia né col sapore né col colore.

La lagrangiana dell'interazione elettrodebole è:

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} (J_{\mu}^{-} W_{+}^{\mu} + J_{\mu}^{+} W_{-}^{\mu}) + \frac{g}{\cos \theta_W} (J_{\mu}^3 - \sin \theta_W J_{\mu}^{\text{emg}}) Z^{\mu} + g \sin \theta_W J_{\mu}^{\text{emg}} A^{\mu}$$

⁴In questo caso ci sarebbe da tenere conto anche della "rigenerazione", che noi non vediamo, ma che brevemente consiste nel fatto che l'interazione di K_1 e K_2 con la materia può portare alla "ricomparsa" di K_1 nel fascio.

ove g è la costante di accoppiamento elettrodebole, J sono le varie correnti in gioco e W i campi. Il primo addendo è relativo alla corrente carica, il secondo a quella neutra, l'ultimo all'elettromagnetismo. L'angolo θ_W è detto "di Weinberg" o "di mescolamento". Si ha:

$$g \sin \theta_W = \frac{q_{el}}{\sqrt{\epsilon_0 \hbar c}}$$

Insomma, q_{el} e θ_W sono i parametri liberi della teoria.

Da ciò si può prevedere la massa dei W e Z^0 , che risulta uguale a quella misurata. La matrice CKM "è contenuta" nei J^\pm del primo addendo.

L'altra cosa che mancava (fino a poco tempo fa) nel modello era la massa del bosone di Higgs, che un paio d'anni fa è stato trovato al CERN (ha una massa di circa 125 GeV, e non era stato trovato finora perché ha una sezione d'urto di produzione bassissima).

Infine, non riusciamo a capire il perché della gerarchia delle masse, cioè perché le particelle sono alcune più leggere e alcune più pesanti, e perché hanno proprio quella massa e non altre.