

# Fisica Nucleare

tommaso.feorlin, filippo.angelini

March 2020

## Contents

<b>1</b>	<b>Unità e Proprietà</b>	<b>2</b>
1.1	Densità di un nucleo atomico . . . . .	2
1.2	Commento su halo nuclei e nuclear skin . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Modello a gas di Fermi</b>	<b>4</b>
2.1	Calcolo dell'energia cinetica media e considerazioni . . . . .	6
2.2	Commento sul potenziale . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Modello a goccia di fluido</b>	<b>7</b>
3.1	Termine di volume . . . . .	8
3.2	Termine di superficie . . . . .	8
3.3	Termine Coulombiano . . . . .	8
3.4	Termine di asimmetria . . . . .	9
3.5	Termine di pairing . . . . .	10
3.6	Applicazioni . . . . .	11
3.6.1	Energia di separazione . . . . .	11
3.6.2	Parabole di massa e decadimento $\beta$ . . . . .	11
3.6.3	Nuclei speculari . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Processi nucleari</b>	<b>13</b>
4.1	Fissione nucleare . . . . .	13
4.1.1	Stima della massa di fissione spontanea . . . . .	14
4.1.2	Fissione indotta . . . . .	15
4.2	Fusione nucleare . . . . .	15
4.2.1	Reazioni termonucleari nelle stelle . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Deutone</b>	<b>17</b>
5.1	Definizione e proprietà . . . . .	17
5.2	Modello del deutone . . . . .	17
5.3	Notazione spettroscopica . . . . .	18
5.4	Raffinamento con commistione di stati $s$ e $d$ . . . . .	18

<b>6</b>	<b>Il modello a Shell</b>	<b>19</b>
6.1	Descrizione ed evidenze sperimentali . . . . .	19
6.2	Trattazione matematica . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Modello di Bohr e Mottelson (collettivo)</b>	<b>26</b>
7.1	Trattazione matematica (per sommi capi) . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Decadimenti</b>	<b>29</b>
8.1	Decadimento $\alpha$ . . . . .	30
8.1.1	Caratteristiche principali . . . . .	30
8.1.2	Legge di Geiger-Nuttal . . . . .	31
8.1.3	Condizione energetica di decadimento . . . . .	32
8.1.4	Teoria elementare del decadimento $\alpha$ (Gamow) . . . . .	33
8.2	Decadimento $\beta$ . . . . .	36
8.2.1	Ipotesi di Pauli . . . . .	37
8.2.2	Teoria di Fermi . . . . .	37
8.2.3	Regola d'oro di Fermi . . . . .	38
8.2.4	Spettro energetico . . . . .	38
8.2.5	Regole di selezione . . . . .	42
8.3	Decadimento $\gamma$ . . . . .	44
8.3.1	Osservazioni energetiche . . . . .	44
8.3.2	Classificazione delle transizioni elettromagnetiche . . . . .	45
8.3.3	Stime di Weisskopf . . . . .	47
<b>9</b>	<b>Sezione d'urto</b>	<b>48</b>
<b>10</b>	<b>Interazione radiazione-materia</b>	<b>49</b>
10.1	Radiazione elettromagnetica . . . . .	49
10.1.1	Effetto fotoelettrico . . . . .	49
10.1.2	Effetto Compton . . . . .	50
10.1.3	Produzione di coppie $e^+e^-$ . . . . .	52
10.1.4	Considerazioni generali . . . . .	52
10.2	Radiazione di particelle cariche . . . . .	54
10.2.1	Stopping power . . . . .	55
<b>11</b>	<b>Esercizi</b>	<b>58</b>

## 1 Unità e Proprietà

### 1.1 Densità di un nucleo atomico

Proprietà che riguardano i costituenti del nucleo. Il nucleo è un oggetto costituito da 1 a 240 particelle (o più!) chiamate **adroni** (dal greco *hadròs*, forte). Il grafico mostra una rappresentazione della **densità di materia**  $\rho_m$  (non di massa, ma bensì numero di particelle su volume  $\text{fm}^{-3}$ ). Integrando sul volume otterremo il numero di massa  $A$  del nucleo. Al crescere di  $A$  cresce l'integrale

sotto la curva. L'osservazione che va fatta è che queste densità, costruite a partire da esperimenti di *scattering* elastico di elettroni sul nucleo svolti da Robert Hofstadter (Nobel), hanno un valore pressoché costante attorno a  $\rho_0$  (densità di saturazione), ovvero nella parte centrale. Anche l'abbassarsi della densità nelle parti lontane dal centro ha la stessa pendenza (il modo in cui la densità diminuisce verso zero è circa lo stesso per tutti i nuclei). Fermi ha ricavato anche due importanti relazioni:

$$r = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad r_0 \simeq 1.2 \text{ fm}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

Questa densità è parametrizzabile con una funzione molto semplice detta **funzione (profilo) di Fermi**. La funzione di Fermi in realtà viene moltiplicata successivamente (a seconda del nucleo in esame) per  $\rho_0$ . Perciò per definizione il profilo di Fermi è:

$$F(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} \Rightarrow \rho(r) = F(r)\rho_0$$

Nel grafico si fissa un  $R_0$ , raggio del punto a metà altezza rispetto a  $\rho_0$  (e che quindi **varia per ogni nucleo!**) e viene modificato il parametro  $a$ , ovvero la **diffusività**. Questa dà conto di come la densità centrale sfumi fino ad arrivare a 0. È una descrizione di tipo fenomenologico ma non spiega veramente le cose. Idealmente la funzione è la somma dei quadrati delle funzioni d'onda. Poiché dunque **la densità di materia tende a saturare all'interno del nucleo**, possiamo dedurre che i nucleoni si comportino, a brevissime distanze, come delle "palline rigide" fra loro impenetrabili (se infatti ciò non accadesse, la densità di materia crescerebbe al diminuire del raggio, all'interno di un nucleo).

## 1.2 Commento su halo nuclei e nuclear skin

Per nuclei molto leggeri con  $A = 2 - 16$  attorno al nucleo vero e proprio vi è un **alone** di neutroni e protoni, che fa sì che il raggio nucleare sia molto più grande di quello previsto dalla teoria. Questo accade perché all'interno del nucleo vi sono presenti sotto-strutture più stabili. Un esempio è quello dell' ${}^6\text{He}$ , che è essenzialmente composto da una particella  $\alpha$  con due neutroni che le ruotano attorno.

Per nuclei molto pesanti invece, sappiamo che la forte interazione Coulombiana tra protoni richiede una asimmetria neutronica. Proprio per questo, si forma una **neutron skin** ai bordi del nucleo (il perché succeda ai bordi e non dentro verrà spiegato con il modello a *shell*).

## 2 Modello a gas di Fermi

Il modello a gas di Fermi è un **modello quantistico, statistico a particelle indipendenti**.

- **quantistico**. Si basa sulla soluzione dell'equazione di Schrödinger;
- **indipendente**. Non vengono considerate nella trattazione interazioni tra le particelle (bensì, si parla dell'azione di un campo medio, che verrà rappresentata da una buca infinitamente e poi finitamente profonda);
- **statistico**. Il modello è valido per un cospicuo numero di particelle.

e si basa su tre diverse ipotesi:

- Il nucleo è costituito da **fermioni** di spin  $\frac{1}{2}$ :  $Z$  protoni e  $A - Z$  neutroni;
- Il singolo nucleone è soggetto ad un potenziale medio, rappresentato da una **buca di potenziale a simmetria sferica** che si estende in una regione  $r = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  (più avanti in modello più avanzati si daranno modelli più raffinati di potenziale medio);
- **Il gas di nucleoni è degenere**, l'energia cinetica è molto maggiore di quella ambientale di modo che i nucleoni sono nello stato di energia più bassa accessibile pur mantenendo il principio di esclusione di Pauli.

Dall'ultima ipotesi comprendiamo che i fermioni si dispongono a partire da energie più basse fino a raggiungere il livello di energia più alto detto **energia di Fermi**, dove compiono un moto con un momento detto **momento di Fermi**. L'ultimo stato occupato forma la **superficie di Fermi** e tutte le particelle al di sotto sono il **mare di Fermi**.

Neutroni e protoni hanno due diverse buche di potenziale vista la differenza di carica elettrica che possiedono. Fermi però volendo fare le cose a spanne basa il modello a gas su una buca di potenziale infinita con base a 0. Troviamo le solite autofunzioni a seconda dell'indice di livello energetico  $n$  e autovalori che vanno come il quadrato di quest'ultimo. Si passa poi alle tre dimensioni, fattorizzando opportunamente l'autofunzione lungo i tre assi. Da qui si può osservare che esistono terne diverse di numeri che danno la stessa energia

$$E = \frac{h^2}{8ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

**L'energia è degenere**. Occorre costruire una teoria per stimare la **densità di stati energetici**. Ad ogni  $n$  corrisponde uno stato quantico di energia

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8ma^2} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{8ma^2 E_n}{h^2}}$$

da cui, differenziando

$$dE = \frac{\hbar^2 n dn}{4ma^2} \Rightarrow n dn = \frac{4ma^2}{\hbar^2} dE$$

e, per valutare il numero di stati spazzati dal vettore  $\vec{n}$  possiamo proseguire calcolando il numero di stati nello strato di spessore  $dn$ . In un ottante si ha

$$N_{stati} = dN = \rho(E)dE = \frac{4\pi n^2 dn}{8} = \frac{\pi n dn}{2} = V \frac{2^{\frac{5}{2}} \pi m^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} dE}{h^3}$$

Il fatto che  $\rho(E) \propto \sqrt{E}$  spiega il perché questo modello è un modello statistico: è accurato solo per nucleo molto pesanti. Da

$$\rho(E)dE = V \frac{2^{\frac{5}{2}} \pi m^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} dE}{h^3}$$

ricordando che

$$p = \sqrt{2mE} \Rightarrow \sqrt{E} = \frac{p}{\sqrt{2m}}$$

e

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dE = \frac{p dp}{m}$$

e

$$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

si ha

$$N_{stati} = dN = \rho(p) dp = \frac{4}{9\pi} \left(\frac{r_0}{\hbar}\right)^3 A p^2 dp \Rightarrow \rho(p) \propto p^2$$

Possedendo l'informazione sulla densità di stati è possibile calcolare il momento di Fermi, da cui poi l'energia di Fermi. Nel caso dei protoni:

$$Z = 2 \int_0^{p_{Fp}} \rho(p) dp \Rightarrow p_{Fp} c = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar c}{r_0} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Nel caso dei neutroni:

$$A - Z = 2 \int_0^{p_{Fn}} \rho(p) dp \Rightarrow p_{Fn} c = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar c}{r_0} \left(\frac{2(A - Z)}{A}\right)^{\frac{1}{3}}$$

svolvendo l'integrale e ricordando  $r_0 \approx 1.25$  fm,  $m_{nucl} = 939 \frac{\text{MeV}}{c}$ , in approssimazione  $A = 2Z$  si ha  $p_{Fp} \approx p_{Fn} \approx \frac{\text{MeV}}{c}$ . Da cui

$$E_F = \frac{p_{Fp}^2}{2m_{nucl}} \Rightarrow 30 \text{ MeV}$$

Un valore di energia che sta **circa a metà dell'intervallo stimato con il principio di indeterminazione!** Quindi ottimo, è una buona stima di quella che è l'energia posseduta dai nucleoni alla superficie di Fermi. Da considerazioni sperimentali si ha anche che la differenza tra la sommità della buca ed il livello di Fermi è circa di  $7 - 8 \frac{\text{MeV}}{\text{nucleone}}$  (vedrai poi col modello a goccia), quindi la profondità della buca è stimabile statisticamente come  $V_0 = E_F + \frac{B}{A} \simeq 40$  MeV. Da qui si hanno delle idee sugli **ordini di grandezza** della faccenda.

## 2.1 Calcolo dell'energia cinetica media e considerazioni

Partendo da

$$\langle E_c \rangle = \frac{\int \frac{p^2}{2m} dN}{\int dN}$$

andiamo a svolgere i calcoli.

$$\langle E_c \rangle = \frac{\int \frac{p^2}{2m} dN}{\int dN} = \frac{1}{A} = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{r_0}{\hbar} \right)^3 A \int \frac{p^4}{2m} dp = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{r_0}{\hbar} \right)^3 \left( \frac{P_p^5}{10m_p} + \frac{P_n^5}{10m_n} \right)$$

Dal quale, sostituendo i momenti di Fermi e ricordando che  $m_p \approx m_n$  si ottiene

$$\langle E_c \rangle = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{r_0}{\hbar c} \right) \frac{1}{mc^2} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{5}{3}} \left( \frac{\hbar c}{r_0} \right) \left[ \left( \frac{2Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} + \left( \frac{2(Z-A)}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \right]$$

Ponendo  $\frac{2Z}{A} = 1 - x$  e  $\frac{2(Z-A)}{A} = 1 + x$  espandiamo in serie

$$(1-x)^{\frac{5}{3}} + (1+x)^{\frac{5}{3}} = 1 - \frac{5x}{3} + \frac{5x^2}{9} + \dots + 1 + \frac{5x}{3} + \frac{5x^2}{3} + \dots$$

ottenendo la versione finale

$$\langle E_c \rangle = \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\hbar c}{r_0} \right)^2 \frac{3}{10mc^2} \left[ 1 + \frac{5}{9} \left( \frac{A-2Z}{A} \right)^2 \right]$$

che ha un minimo in  $A = 2Z$ , facendoci comprendere che i nuclei con egual numero di protoni ed elettroni sono più favoriti, più stabili. Inoltre  $\langle E_c \rangle \approx 20MeV$

Si può fare di meglio. Abbiamo dimostrato che energia di Fermi e momento di Fermi **dipendono solo dalla densità nucleare**. Se io ora non distinguo tra neutroni e protoni, il numero di stati con momento tra  $p$  e  $p + dp$  si ottiene moltiplicando per 4<sup>1</sup>. E chiaramente se integro su tutti i momento troverò il numero di protoni e neutroni  $A$

$$A = \int_0^{p_F} \rho(p) dp = \frac{2 \cdot 4\pi}{3 \cdot 3\pi^2} \left( \frac{r_0}{\hbar} \right)^3 A p_F^3 \Rightarrow p_{FC} = \left( \frac{A}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right) \hbar c$$

Misurando il momento di fermi risalgo alla densità nucleare.

## 2.2 Commento sul potenziale

Energia di Fermi e l'energia minima per togliere un nucleone  $B/A$  sono entrambe costanti. La buca di potenziale quindi non si modifica al variare del numero di massa. All'aumentare del numero di massa, l'energia di legame (rapporto  $B/A$ ) si mantiene costante. Il potenziale, inoltre, ha questa forma perché Fermi nel calcolo ha scelto la strada 'spannometrica', senza considerare che tra i potenziali di protoni e neutroni c'è una differenza di carattere Coulombiano.

<sup>1</sup>2 (spin) per 2 (isospin)

### 3 Modello a goccia di fluido

Uno dei primi modelli, storicamente. Il nucleo è una gocciolina di liquido incompressibile in cui le molecole, che sono in moto, interagiscono fra loro con sole forze molecolari a corto raggio e restano confinate nella goccia. Si è fatta questa analogia perché

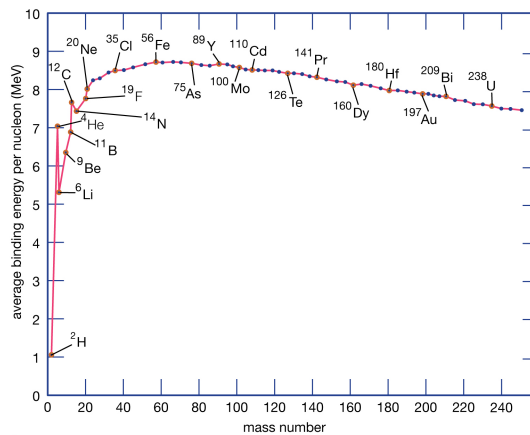
- Le forze intermolecolari a corto raggio sono **simili alla forza nucleare** anch'essa a corto raggio.
- La densità (si può benissimo pensare a quella dell'acqua) è indipendente dalle dimensioni della goccia **come la densità nucleare** è indipendente dalla dimensione del nucleo atomico.
- Il calore richiesto per far evaporare una massa fissa d'acqua è indipendente dalla goccia, **che si traduce nella costanza dell'energia di legame**  $\frac{B}{A}$ .

Il modello a goccia è un **modello collettivo**, nel senso che riesce a rappresentare con pochi parametri quella che è l'energia di legame (per mezzo di analogie con una goccia di liquido). Questo modello riesce anche a spiegare l'andamento della carta dei nuclidi. Ovvero, ciò che si otterrà alla fine con questo modello sarà la **formula semi-empirica di massa**, funzione del numero di protoni, neutroni e dell'energia che li lega, l'**energia di legame**, costituita a sua volta da un **collettivo di parametri** attentamente valutati.

Ricordando la  $E = mc^2$ , una formula per la massa di un nucleone è

$$m(Z, N) = Zm_p + Nm_n - B$$

dove  $B$  (dall'inglese *bind*), va attentamente valutata al fine di ottenere il noto andamento dell'energia di legame contro il numero di massa. Analizzo singolarmente i vari termini:



### 3.1 Termine di volume

Questo è il termine più pesante. Le forze nucleari **saturano**, ovvero ogni nucleone è fortemente legato con i soli nucleoni che lo circondano.

$$B \neq \langle U \rangle \frac{A(A-1)}{2}$$

ma va opportunamente ripesata tra i soli nucleoni vicini entro un certo **volume di interazione**  $V_{int} < V_{nucleo}$ . Quindi

$$B = \sum_{r < R_{int}} U = \frac{A(A-1)}{2} \frac{V_{int}}{V_{nucleo}} \langle U \rangle \propto A$$

In definitiva, si trova che il contributo a

$$B = a_V A + \dots$$

del termine di volume è di 16 MeV, altissimo, bisogna abbassarlo con altri termini.

### 3.2 Termine di superficie

Ok, i nucleoni interagiscono solo con il loro primi vicini entro il raggio di interazione ma quelli sulla superficie interagiranno di meno. Dal fatto che  $r = r_0 A^{\frac{2}{3}}$  e che una superficie va come  $r^2$  si avrà un termine proporzionale ad  $\alpha A^{\frac{2}{3}}$

$$B = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} + \dots$$

### 3.3 Termine Coulombiano

I protoni, dotati di carica, **tenderanno a respingersi**. Quello che si fa è calcolare l'energia elettrostatica, applicando il teorema di Gauss, ad una sfera (il nucleo) uniformemente carica  $Ze^+$ . Da Fisica 2

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

Fuori dalla sfera, applicando Gauss, si ha

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = E4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Dentro alla sfera di raggio  $R$ , applicando Gauss, si ha

$$\Phi_E = \frac{\rho V(r)}{\varepsilon_0} = \int \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = E4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

L'energia elettrostatica  $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$  è rispettivamente

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$



$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^R E(r)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{5} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Il totale è  $U_E = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$  perciò

$$B = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \dots$$

### 3.4 Termine di asimmetria

Nella carta dei nuclidi, per  $A < 40$  (basso)  $N = Z$  e i nuclei in questa porzione sono nettamente più stabili. Deviazioni da questa uguaglianza portano ad un **deficit dell'energia di legame**, perché tutti gli altri nuclei per i quale essa non vale **sono meno stabili**. Per questo fenomeno **non vi è una semplice spiegazione classica**. A sua volta però questo termine conta di due contributi principali:

1. La forza nucleare effettiva tra protone e neutrone è più grande di quella n-n o p-p
2. Il Principio di Pauli

1) Quantisticamente, queste particelle sono fermioni. Se prendiamo **particelle identiche** l'unico modo di avere attrazione tra due fermioni identici è che questi abbiano spin diversi. Mentre, per particelle **non identiche**, come in un nucleo atomico, ci sono il doppio di possibilità perché protoni e neutroni si possono combinare assieme sia con spin parallelo che antiparallelo. L'interazione tra due nuclei diversi è favorita. Perciò, andando a valutare questo contributo si ha che rispettivamente, l'energia potenziale dei neutroni e dei protoni sono

$$N(v_{nn} \frac{N}{A} + v_{np} \frac{Z}{A})$$

$$Z(v_{np} \frac{N}{A} + v_{pp} \frac{Z}{A})$$

che sommate danno un polinomio in  $Z^2$ :  $\frac{v}{A}(N^2 + 4NZ + Z^2)$  Volendo riscrivere questa formula in termini del numero di nucleoni e, appunto, della disparità tra protoni e neutroni

$$4NZ = (N + Z)^2 - (N - Z)^2 = A^2 - (N - Z)^2$$

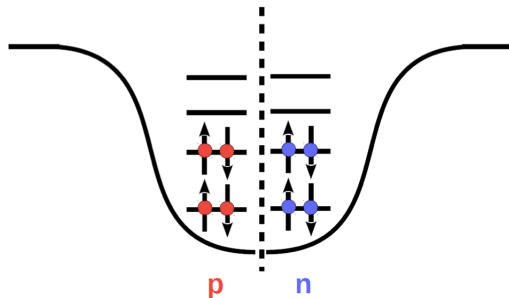
$$N^2 + Z^2 = \frac{1}{2}((N + Z)^2 + (N - Z)^2) = \frac{1}{2}(A^2 + (N - Z)^2)$$

Sostituendo all'interno del polinomio ottenuto e raccogliendo qualche termine si giunge a

$$B \propto \frac{v}{A}(3A - \frac{(N - Z)^2}{A})$$

Il termine rosso viene riassorbito in quello di volume  $\alpha A$ .

2) Per particelle in una buca di potenziale il principio di esclusione di Pauli influisce sulla distribuzione dei singoli protoni e neutroni. Possiamo immaginarli come in due buche separate a una distanza  $\approx \Delta E$  l'uno dall'altro



Per questo motivo delle asimmetrie portano a variazioni nell'energia di legame. Ad esempio, se partiamo da una specie stabile con  $N = Z$  e convertiamo due protoni in due neutroni vi è un aumento di energia pari a  $2 \cdot \Delta E$ . Se ne convertiamo altri due, dovranno saltare due livelli, per arrivare sopra ai neutroni, 3 livelli energetici. Sommando il tutto si avrebbe una variazione pari a  $2 \cdot \Delta E + 2 \cdot 3 \cdot \Delta E = 8 \cdot \Delta E$ .

$$B = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots$$

### 3.5 Termine di pairing

Se consideriamo nuclei isobari ( $\iota\sigma\alpha\zeta - \beta\alpha\rho\alpha\zeta$ , ovvero **fissiamo il numero di massa**  $A$ , notiamo che la dipendenza dell'energia di legame da  $Z$  è parabolica.

$$B = (a_V - a_A)A - a_S A^{\frac{2}{3}} + 4a_A - (a_C A^{-\frac{1}{3}} + 4a_A A^{-1})Z^2$$

Il termine di correzione di pairing è un termine empirico per spiegare i dati sperimentali che è interpretabile solo quantisticamente e completa la cosiddetta formula semi-empirica di massa **SEMF** o **formula delle masse di Bethe-Weizsäcken**.

$$B = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_P}{\sqrt{A}}$$

e  $a_P = +12$  (even-even),  $a_P = -12$  (odd-odd) e 0 per (even-odd). Ovvero, gli elementi nelle even-even sono molto stabili e quindi **'hanno interazione di pairing'** e  $a_p = +12$ .

Otteniamo quindi  $m(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - B$ . Il confronto con i dati sperimentali è ottimo tranne che nei numeri magici o doppio magici.

## 3.6 Applicazioni

### 3.6.1 Energia di separazione

L'**energia di separazione** è la minima energia che va fornita ad un nucleo per strappare un protone o un neutrone. Per il caso protonico si ha

$$m(A, Z) + S_p = m(A - 1, Z - 1) + m_p$$

da cui si ottiene che

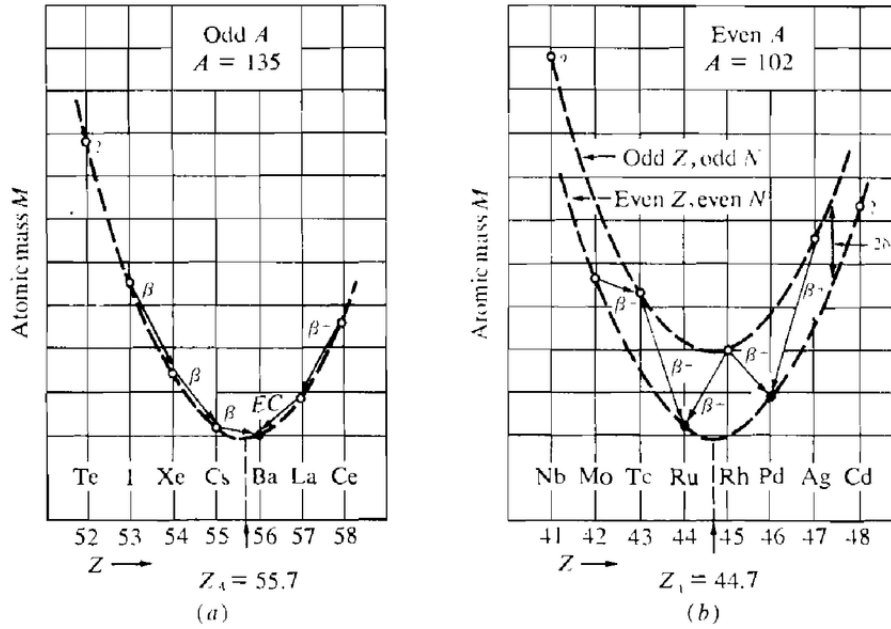
$$S_p = m(A - 1, Z - 1) + m_p - m(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 1, Z - 1)$$

L'energia di separazione di un protone quindi **corrisponde alla differenza di energia di legame tra i due nuclei**.

### 3.6.2 Parabole di massa e decadimento $\beta$

Andand a fissare  $A$  nella SEMF si trova un polinomio quadratico in  $Z$  che corrisponde alla **parabola di massa**. Questa da la condizione che lega  $A$  e  $Z$  per nuclei stabili rispetto al decadimento  $\beta$

- Nel caso di  $A$  **dispari** si ha che all'interno del nucleo ci potrà essere o un numero dispari di protoni e uno pari neutroni o viceversa. Perciò il termine  $a_P$  è nullo e la parabola di massa è **univoca**. Vi sarà quindi in generale un solo isobaro stabile. Se in una parabola vi sono due isobari stabili simmetrici rispetto al vertice ciò non significa che siano entrambi stabili. Anzi, nel caso di  $^{123}\text{Sb}$  e  $^{123}\text{Te}$ , il primo dei due ha un'energia lievemente più alta che fa sì che sia il Tellurio ad essere instabile (seppur con una vita media di  $\approx 6 \cdot 10^{24}$  anni);
- Nel caso  $A$  **pari** vi sono due parabole disponibili, la even-even e la odd-odd (meno stabile), proprio per la presenza del termine  $\pm a_P$ . Si verifica che tutti gli odd-odd sono instabili e si possono avere da 1 a 3 isobari stabili. Il caso a tre isobari stabili lo si ha quando da una odd-odd i nuclei tendono a decadere verso isobari nella even-even con  $Z$  distante di più di 2 da quello prossimo al vertice della parabola. Questo preclude la possibilità che vi siano altri decadimenti  $\beta$  verso quello più stabile, perché  $Z$  verrebbe modificato per più di una unità. I decadimenti doppio- $\beta$  esistono ma sono molto rari. All'instabilità degli odd-odd vi è un'eccezione, quella per nuclei molto leggeri come idrogeno-2, litio-6, boro-10 e azoto-15. Questi, visto che la loro parabola di massa è molto stretta, hanno l'odd-odd stabile. Ciò è alla base della **radiodattazione**.



I nuclei in eccesso di protoni decadono  $\beta^+$  verso quello stabile, quelli in eccesso di neutroni decadono  $\beta^-$  verso quello stabile.

### 3.6.3 Nuclei speculari

Due nuclei speculari (io li definisco 'a salto singolo') sono ad esempio  ${}^{15}_8\text{O}_7$  e  ${}^{15}_7\text{N}_8$ . Questi presentano  $A$  dispari e quindi termine di pairing  $a_P$  nullo. Il termine di asimmetria, che va come  $\alpha(N - Z)^2$  sarà uguale in entrambe le specie nucleari. L'unico termine che differisce (per la presenza o meno di un protone in più) è il termine Coulombiano. Per due isobari vicini ad un nucleo dove vale  $N = Z$  si ha

$$Z_{>} = \frac{A+1}{2} \quad Z_{<} = \frac{A-1}{2}$$

Perciò, se l'energia elettrostatica va come

$$U = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} = k \frac{Z^2}{R}$$

si avrà

$$\Delta B = \frac{k}{R} \left[ \frac{(A+1)^2}{4} - \frac{(A-1)^2}{4} \right] = A \frac{k}{R} = \frac{k}{r_0} A^{\frac{2}{3}}$$

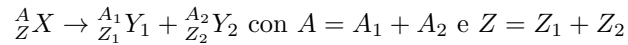
e *plottando* i dati sperimentali in funzione di  $A^{\frac{2}{3}}$  l'andamento è perfettamente lineare.

## 4 Processi nucleari

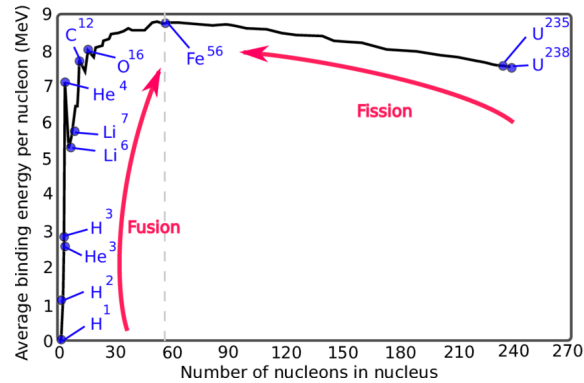
Basandosi sulla sola SEMF si possono descrivere due processi nucleari fondamentali, pensabili come uno complementare all'altro.

### 4.1 Fissione nucleare

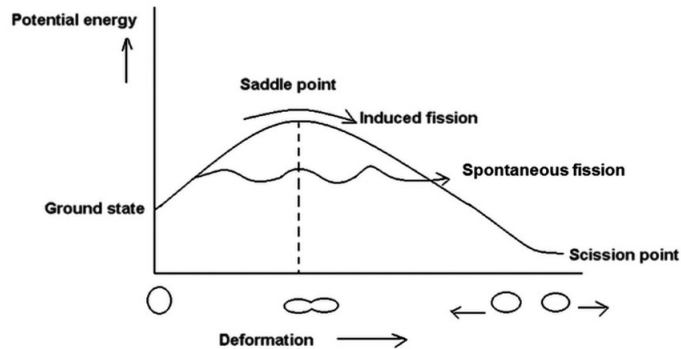
La **fissione**



parte da numeri di massa alti e tende a 'fissionare' il nucleo, ovvero romperlo in nuclei di massa minore in modo da massimizzare l'energia di legame per nucleone e minimizzare di conseguenza l'energia totale del sistema (quella comprendente anche i termini di massa). È un processo **esoenergetico** ed **esotermico**.



Per avere fissione **bisogna necessariamente superare il picco del ferro**, ma ancora si trova che non tutti gli elementi con  $A > 60$  fanno fissione. Anzi, tanti sono molto stabili. Questa stabilità si traduce in una **insolita altezza della barriera di potenziale** che rende improbabili tali reazioni. La probabilità di **fissione spontanea** è quantificabile misurando l'altezza della **barriera di fissione**, definita **energia di attivazione**.



Il nucleo, a seguito di fluttuazioni energetiche inizia a deformarsi. In corrispondenza del punto di sella si forma un 'collo' dal quale vengono generalmente emessi neutroni e si prosegue poi verso la separazione totale.

#### 4.1.1 Stima della massa di fissione spontanea

Il senso della cosa è andare a capire quando vi è un **guadagno di energia positivo a seguito di una deformazione del nucleo**. Supponiamo, senza perdere di generalità, che si stia passando da una sfera (una pizza) ad un ellisse prolato (un pizza battuta). Introduciamo il parametro di **eccentricità** (distanza di un punto dal centro). Siano

$$M(A, Z) \Rightarrow Zm_p + Nm_p - B(A, Z)$$

e

$$M(A, Z)_\varepsilon \Rightarrow Zm_p + Nm_p - B_\varepsilon(A, Z)$$

le due diverse SEMF dello stesso nucleo rispettivamente sferico e poi deformato. Basta sottrarre le due e si ottiene

$$M(A, Z) - M(A, Z)_\varepsilon \Rightarrow B_\varepsilon(A, Z) - B(A, Z) = \Delta B$$

Ma quando  $\Delta B > 0$ ? Cerchiamo di capirlo a partire dalle due pizze (normale e battuta) e dalla loro rispettiva SEMF.

Innanzitutto, nel processo di deformazione, **il numero di protoni e neutroni resta invariato** e nella differenza termini di **volume, asimmetria e pairing** si semplificano. Per il termine di superficie, senza dimostrare

$$a_S A^{\frac{2}{3}} \rightarrow a_S A^{\frac{2}{3}} \left( 1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

e per quello Coulombiano (in diminuzione perché i protoni si allontanano per andare a formare i due 'lobi')

$$a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \rightarrow a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \left( 1 - \frac{1}{5} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

Si ottiene infine

$$\Delta B = a_C A^{\frac{2}{3}} \left( \frac{Z^2}{A} - 2 \frac{a_S}{a_C} \right) \frac{\varepsilon^2}{5} \Rightarrow \Delta B > 0 \text{ per } \frac{Z^2}{A} > 2 \frac{a_S}{a_C}$$

ovvero per  $\frac{Z^2}{A} > 50$ . Quindi da questo numero di massa in poi si hanno nuclei **instabili per deformazioni**, ovvero che hanno una miglior stabilità ad ogni piccola deformazione. Questo spiega come in natura manchino elementi stabili con numeri di massa elevati (a meno di eccezioni). Eccezioni avvengono anche per masse al di sotto di questa soglia, infatti per termini che non compaiono nella SEMF anche elementi con  $Z = 35$  possono fissionare.

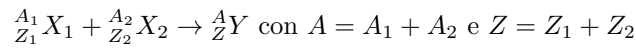
### 4.1.2 Fissione indotta

Dalla scoperta del neutrone del 1932, nel 1934 Fermi e i ragazzi di via Panisperna scoprono che si possono sintetizzare nuclei transuranici bombardando un nucleo di uranio con un neutrone. Esso infatti diventa instabile a causa dell'eccesso di neutroni, si allontana dalla valle di stabilità, "esplora la forma ellissoidale" (energeticamente favorita), decade trasformando un neutrone in un protone emettendo una particella  $\beta^-$  e si trasforma in un nucleo transuranico più stabile con  $Z$  maggiore di un'unità.

Sulla loro scia, ricerche di moltissime altre persone (soprattutto donne) portano a scoprire la fissione nucleare indotta, trovando che a seguito del bombardamento di un nucleo di Uranio con un neutrone lento (**causa scatenante** che fornisce l'energia per rompere la barriera di fissione) e crea una reazione a catena con guadagno di neutroni vi sono Bario e Krypton tra i prodotti di decadimento. Nella maggior parte dei casi della fissione, la distribuzione dei nuclei figli è **asimmetrica** nei numeri di massa. **Processi simmetrici sono meno favoriti**, ma non sono introvabili: vedi l'esempio del  $^{258}\text{Fm}$  (fermio).

## 4.2 Fusione nucleare

La fusione è un processo in cui nuclei leggeri ( $A < 20$ ) **si uniscono** per ottenere energia



A differenza della fissione però, **la fusione (o reazione termonucleare) è molto più pulita** e genera come prodotti specie stabili o comunque poco pericolose. Il punto è che esperimenti di **confinamento elettromagnetico** come TOKAMAK, ancora non hanno raggiunto il *break even*. Si vuole continuare a perseguire questa strada perché non appena si raggiungerà il *break even* si avrà un ottimo modo per ottenere energia.

<u>Reaction</u>	<u>Q value (MeV)</u>
p + d $\rightarrow$ ${}^3\text{He} + \gamma$	5.49
<u>d + d <math>\rightarrow</math> <math>{}^4\text{He} + \gamma</math></u>	<u>23.85</u>
d + d $\rightarrow$ ${}^3\text{He} + \text{n}$	3.27
d + d $\rightarrow$ t + p	4.03
d + t $\rightarrow$ ${}^4\text{He} + \text{n}$	17.59
d + ${}^3\text{He}$ $\rightarrow$ ${}^4\text{He} + \text{p}$	18.35

La cosa difficile è che i due nuclei sono carichi positivamente e quindi, **per fondere, devono superare la barriera coulombiana** che, supponendo di avere  $Z_1$  e  $Z_2$  protoni vale

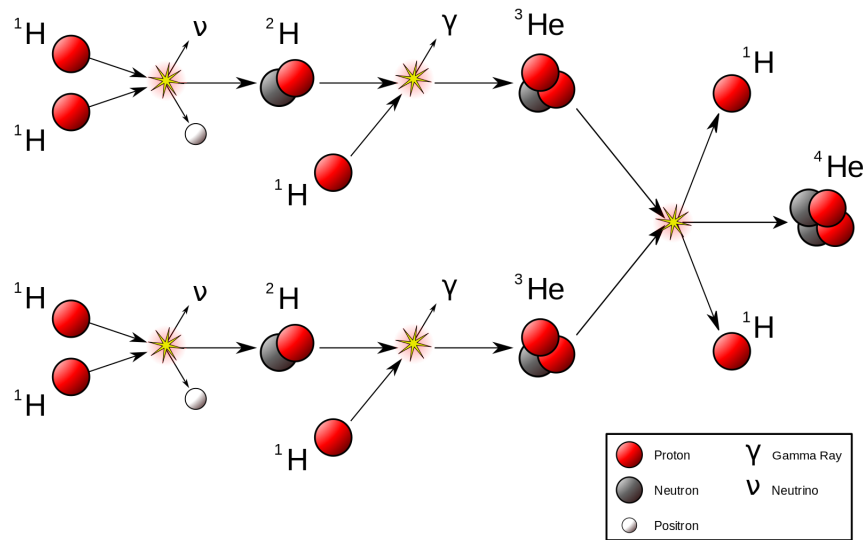
$$V_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

che per la fusione deutone-deutone ( $A = 2$ ,  $R = R_1 + R_2 \approx 3.14$  fm nel momento in cui si toccano) si ha  $V_c \approx 0.5$  MeV. Sembra poco ma in realtà è molto difficile far superare questa barriera a grandi quantità di gas ionizzato.

Il modo per ottenere fusione nucleare tutt'ora utilizzato è provocare **una collisione** tra due gas ionizzati ad elevatissima velocità e confinati elettromagneticamente. Avendo un gas si può fare della statistica, non si può controllare perfettamente l'energia di ogni particella che va appunto come la distribuzione di Maxwell-Boltzmann a una data  $T$ . Affinché una buona percentuale di deutoni superino la barriera Coulombiana bisogna portare a temperature elevatissime il plasma. Bisogna poi sperare che i deutoni che popolano la coda a più alta energia della distribuzione MB si scontrino e superino la barriera per compiere la reazione. Però a livello energetico, aumentando la temperatura si incrementa la percentuale di particelle sopra la barriera, ma si consuma anche più energia e quindi ci si allontana dal *break even*.

#### 4.2.1 Reazioni termonucleari nelle stelle

La massa solare è principalmente composta di idrogeno ed è sottoposta ad un fortissimo schiacciamento dovuto al campo gravitazionale. La temperatura sulla superficie del Sole è di circa 5600 K e al suo interno raggiunge ordini di milioni di Kelvin. **A queste temperature una grande percentuale di particelle supera la barriera coulombiana**, che possono quindi fondere con altre, fino alla formazione di  ${}^4\text{He}$  che fornisce energia alla stella per evitare il collasso gravitazionale.



A temperature molto elevate tutto l'idrogeno perde il suo elettrone andando a formare un mare di protoni. Visto che non esiste il di-protone, le collisioni generano molta energia e compongono deutoni. Nuove collisioni deutone-protone



liberano energia, raggi gamma, e portano alla formazione di  ${}^3\text{He}$ . Successivamente questo si fonde con i suoi simili dando vita a un nucleo di  ${}^4\text{He}$  a due protoni che continuano ad alimentare la reazione di fusione (*p-p chain*)

L'unica particella emessa in questo processo che interagisce con le altre scaldando l'interno del sole è il **raggio gamma**  $\gamma$ . Si stima che un raggio  $\gamma$  emesso nel nucleo impieghi dai 700 ai 100000 anni per uscire dal nucleo solare.

Sono stati impiegati 6 protoni e si è ricavato un  ${}^4\text{He}$ , due protoni, e un'energia di  $\approx 26$  MeV.

## 5 Deutone

### 5.1 Definizione e proprietà

Il **deutone**  $d$  è il più semplice sistema (debolmente) legato nucleone-nucleone. È un sistema legato nel senso che **la massa del deutone è inferiore alla somma delle masse di neutrone e protone**. Ovvero vi è una *binding energy positiva*

$$B = 1 \cdot m_p + 1 \cdot m_n + m_d \approx 2.224 \text{ MeV}$$

Il suo **raggio** è maggiore della somma dei raggi di neutrone e protone. Questo contribuisce a dire che è debolmente legato infatti i due nuclei non si toccano ma sono leggermente distanti. Quindi, riassumendo:

massa $mc^2$	1876.124	MeV
raggio rms	$1.963 \pm 0.003$	fm
stato fondamentale (unico)	$J^\pi = 1^+$	
momento di <b>dipolo</b> magnetico	$0.857438228(9)$	$\mu_N$
momento di <b>quadrupolo</b> elettrico	$+0.00286 \pm 0.00030$	eb

### 5.2 Modello del deutone

Al solito, visto che ci sono due particelle, ci mettiamo nel sistema di riferimento del centro di massa. I gradi di libertà di un sistema sono  $3N$  dove  $N$  è il numero di particelle che lo compongono. Ad essi vanno tolti 6 gradi di libertà, 3 traslazioni e 3 rotazionali per le invarianze imposte. In un sistema a geometria lineare come quello descritto però ne vanno sottratti 3 traslazionali e **2 rotazionali**, perché una rotazione lungo l'asse principale lo mantiene già invariante. Allora

$$3N - 5 = 1$$

**Vi è solo un modo vibrazionale lungo la coordinata radiale relativa.**

Dopo aver svolto il cambiamento di coordinate nell'hamiltoniana, la separazione delle variabili e dopo aver introdotto la funzione d'onda radiale ridotta si arriva a

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ V(|\vec{r}|) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] u(r) = Eu(r)$$

e bisogna scegliere tra svariati modelli, la forma del potenziale  $V$ . Quello che meglio riproduce un potenziale nucleare forte a corto raggio è una buca profonda circa 35 MeV e larga 2 fm. Per lo stato fondamentale, l'unico, con  $l = 0$ , facendo il *matching* della **derivata logaritmica** e sapendo che in 0 la funzione d'onda è nulla allora ottengo una funzione oscillante all'interno ed esponenziale all'esterno. **Eliminando le degenerazioni** resta un seno all'interno e un esponenziale decrescente all'esterno. Poiché stiamo cercando la soluzione per lo stato fondamentale (a minor energia) avremo una soluzione oscillante che non ha nodi all'interno e decresce esponenzialmente per  $r > 2$  fm

Dal dato sperimentale che il momento angolare e la parità valgono  $J^\pi = 1^+$  possiamo chiederci quali siano i modi di ottenere tali risultati, combinando momento angolare orbitale e spin della particella. Per i singoli nucleoni, gli spin sono entrambi 1/2, mentre la parità vale 1.

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \Rightarrow |\vec{S}| = 0, 1$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow |\vec{J}| = 0, 2, 4 \quad (\pi = +!)$$

Quindi  $L$  deve essere pari e la somma 1 perciò due sono le possibilità, entrambe valide, ( $S = 1, L = 0$ ) e ( $S = 1, L = 2$ ) perché nella somma vettoriale totale  $|l - s| < j < l + s$  è permesso il valore  $j = 1$ . In prima approssimazione si può affermare che  $l = 0$  è lo stato fondamentale perché è **quello a energia più bassa**. In notazione spettroscopica diciamo che lo stato fondamentale è  ${}^3S_1$

### 5.3 Notazione spettroscopica

$${}^{2s+1}L_j$$

dove il primo apice è la molteplicità dello spin, la lettera centrale **maiuscola** indica il numero del momento angolare orbitale e il pedice il momento angolare totale.

L=0	s	sharp
L=1	p	principal
L=2	d	diffuse
L=3	f	fundamental
L=4,5,6	g,h,i,...	

### 5.4 Raffinamento con commistione di stati $s$ e $d$

Non appena però ci si confronta con la realtà sperimentale e si impone  $\ell = 0$ , si trovano delle discrepanze. Ci si accorge infatti che i dati sperimentali dello stato fondamentale non sono compatibili con una funzione d'onda  $s$  con momento angolare orbitale nullo, ma che ci deve essere una sovrapposizione quantistica con un'onda  $d$  con  $\ell = 2$ .

Per evidenziare questa necessità, confrontiamo le previsioni teoriche dell'osservabile del **momento di dipolo magnetico** con le osservazioni sperimentali.

In generale  $\vec{\mu}$  è somma di una parte orbitale e di una parte di spin, ma nel caso del deutone abbiamo supposto  $\ell = 0$ , quindi si ottiene:

$$\vec{\mu} = g_\ell \vec{l} + g_s \vec{s} = g_s \vec{s} = \frac{1}{2}(g_{s,p} + g_{s,n})\mu_N \Rightarrow \langle \psi | \vec{\mu} | \psi \rangle = 0.8798 \mu_N$$

e il confronto con il dato sperimentale è buono ma per nulla esatto. Per sistemare le cose bisogna convincersi che **la funzione è in realtà combinazione anche di una funzione d'onda  $d$** . Perciò, possiamo scrivere la funzione d'onda più generale come  $\psi_2 = a_d \psi_d + a_s \psi_s$ , a cui è associato un valore medio del momento di dipolo magnetico

$$\langle \mu \rangle_{\psi_2} = a_s^2 \langle \mu \rangle_{l=0} + a_d^2 \langle \mu \rangle_{l=2}$$

con  $a_s^2 = 96\%$  e  $a_d^2 = 4\%$ . Una ulteriore discrepanza si vede sul valore del momento di quadrupolo elettrico (**che se ci fosse solo onda  $s$  sarebbe nullo**) ovvero il valore di aspettazione dell'operatore

$$Q_m = er^2 Y_{2m}(\theta, \varphi)$$

in cui per allinearsi con il dato sperimentale bisogna aggiungere una frazione di onda  $d$  nella funzione del sistema. In realtà, il termine di quadrupolo è frutto di un contributo diagonale dell'onda  $d$  e di un **termine di interferenza tra  $s$  e  $d$**  (il quadrupolo è un tensore di rango due e porta un accoppiamento). Dai conti

$$\begin{aligned} \langle a_s \psi_0 + a_d \psi_2 | Q_m | a_s \psi_0 + a_d \psi_2 \rangle &= \cancel{a_s^2 \langle \psi_0 | Q_m | \psi_0 \rangle} + a_d^2 \langle \psi_2 | Q_m | \psi_2 \rangle + \\ &+ \langle \psi_0 | Q_m | \psi_2 \rangle + a_d a_s \langle \psi_2 | Q_m | \psi_0 \rangle = 2a_s a_d \langle \psi_0 | Q_m | \psi_2 \rangle + a_d^2 \langle \psi_2 | Q_m | \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

## 6 Il modello a Shell

Il modello a buca quadra adottato per il deutone **non è assolutamente applicabile a nuclei pesanti**. Le soluzioni analitiche sono possibili solo per  $A \approx 20$ . L'idea è quella di **ridurre artificialmente  $A$  pensando che i nucleoni più vicini al fondo della buca siano inerti mentre solo quelli più in alto mantengono la loro identità**.

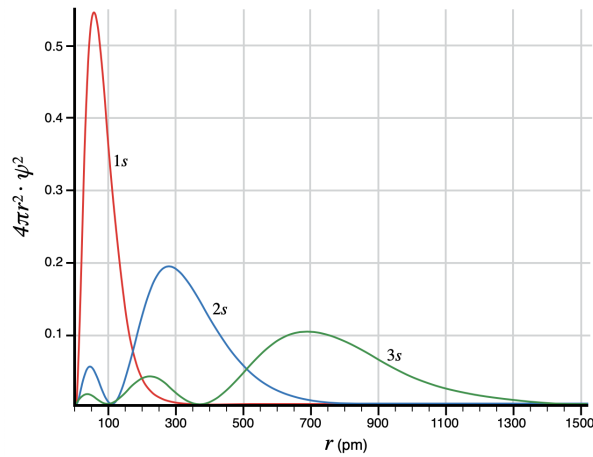
### 6.1 Descrizione ed evidenze sperimentali

Shell dall'inglese conchiglia, ma anche **guscio, strati**. Questo modello **supera la SEMF**, ovvero permette di spiegare i nuclei magici e vuole provare a risolvere i gradi di libertà principali di un nucleo senza voler risolvere l'equazione di Schrödinger per  $A$  particelle

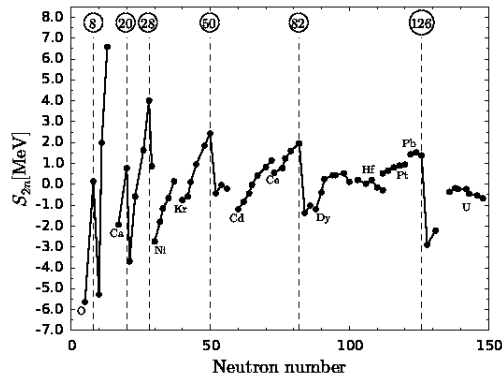
$$H = \sum_{i=1}^A \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

che porterebbe, con  $A = 200$  a  $600$  variabili da gestire (a oggi siamo ad  $A = 12$ ). Questo si chiama approccio *many body*. Si divide il nucleo in  $A - 1$  particelle che formano il **core** e si guarda la  $A$ -esima particella, associata a una sua coordinata, soggetta ad un potenziale medio generato dal *core*.

Questo è un primo modello che permette di effettuare studi specifici sulle posizioni dei nucleoni e che nel suo sviluppo si è **ispirato alla fisica atomica**. Gli elettroni, in fisica atomica, occupano ben definiti gusci elettronici e un salto energetico tra di essi corrisponde alla frequenza di emissione o assorbimento dell'atomo. Questo dalla trattazione quantistica. **Anche in fisica nucleare è possibile parlare di gusci nucleari**, essi però saranno molto più sovrapposti tra loro per via del fatto che i nucleoni sono molto più massivi.

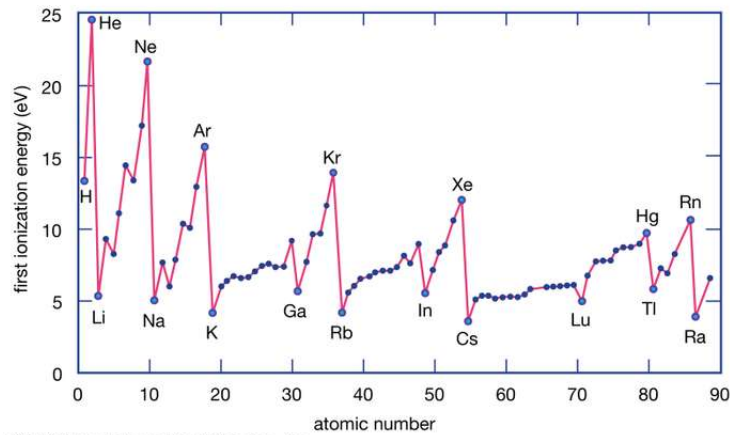


Stampalo in testa: questa figura ben delineata sotto forma di gusci. In ambito atomico c'è tanto 'spazio vuoto'. Nei nuclei c'è qualcosa di analogo? Sì e no. **In un nucleo non ci sono solo elettroni ma neutroni e protoni** perciò devo studiare il potenziale di separazione di neutroni o di protoni. Da qui, si vede che ogni tanto c'è una caduta rispetto al *trend* crescente. Vi è un andamento sistematico. La situazione ricorda il modello a *shell* atomiche.



Andando a fare un grafico della **differenza tra il valore sperimentale e quello predetto dalla SEMF** dell'energia di separazione (protonica o neutronica che sia) i picchi in corrispondenza di numeri magici sono visibili ancora meglio. Tuttavia questo **non basta a giustificare l'ipotesi di modello a shell**, ma vi sono altre lampanti evidenze sperimentali!

- L'energia di separazione di protoni o neutroni ha dei picchi (vedi il grafico appena sopra) in corrispondenza di alcuni nuclei detti magici (si vede molto bene per  $Z = 50$ ). Questo avviene in modo del tutto simile in fisica atomica, dove strappare un elettrone ad un gas nobile richiede molta più energia (vedi il grafico appena sotto).



© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

- La **sezione d'urto di cattura neutronica** di nuclei magici è nettamente più piccola di elementi con massa simile. Quindi, mentre determinati nuclei sono propensi ad ospitare neutroni, altri, molto vicini in massa, sono già stabili di loro per qualche strano motivo.

- Le energie di eccitazione del primo stato eccitato (solitamente un  $2^+$ ) dei nuclei pari pari risultano avere dei picchi in corrispondenza dei numeri magici: È più difficile eccitare uno stato fondamentale di un nucleo magico.

## 6.2 Trattazione matematica

In questo modello, ripeto, si tratta il nucleo come un *core* di  $A - 1$  particelle e la particella rimanente con una propria coordinata. Quest'ultima, come in un sistema a due corpi che si rispetti, sarà soggetta ad un potenziale centrale 'medio', che tiene conto mediamente del contributo di ogni singolo nucleone di *core*. Si trascurano **interazioni residue** (non centrali). I potenziali utilizzati a questo scopo sono sostanzialmente tre:

1. Buca quadra a profondità finita
2. Oscillatore armonico isotropo. Ovvero andiamo ad immaginare il potenziale come una buca centrata in 0 e quindi attorno al suo centro, **per basse energie si espande il potenziale**

$$U(r) \approx U(r_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{r_0} (r - r_0)^2$$

3. Potenziale di Woods-Saxon

Consideriamo il secondo potenziale e facciamo qualche conto. **Direttamente in tre dimensioni**, l'equazione di Schrödinger da risolvere, fattorizzata lungo le tre direzioni è

$$\left[ \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \right] \phi(x)\phi(y)\phi(z) = E\phi(x)\phi(y)\phi(z)$$

dove l'autovalore non è altro che la somma degli autovalori dell'oscillatore armonico lungo le direzioni singole, risultato della fattorizzazione

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \left( n_x + \frac{1}{2} + n_y + \frac{1}{2} + n_z + \frac{1}{2} \right)$$

Già da subito noto che c'è degenerazione in 3 dimensioni e definisco  $N = n_x + n_y + n_z$  il **numero di fononi**, ovvero il numero di quanti di eccitazioni. Il numero di fononi lo si può riscrivere in coordinate polari con i numeri quantici  $n, \ell, m, m_\ell$  in

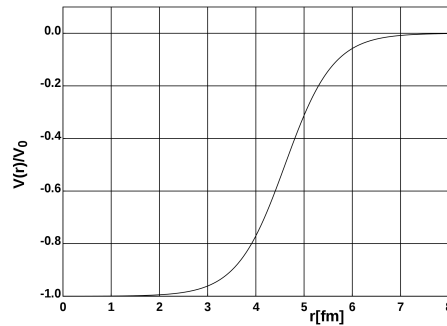
$$N = 2(n_r - 1) + \ell = 2n + \ell$$

Tenendo conto che  $\ell = N, N - 2, \dots, 0$  (o 1) e  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$  si ricava la formula per la degenerazione ovvero

$$\text{deg} = \frac{1}{2}(N + 1)(N + 2)$$

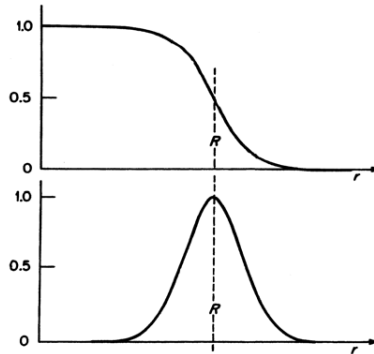
Come è possibile che per  $N = 0$  si abbia degenerazione 2? Ovvero che in uno stato  $s$  vi siano due particelle? Perché se moltiplico la formula per due vado a considerare anche la **degenerazione di spin** delle particelle fermioniche. **Ma questo è sufficiente a rispondere con la teoria ai numeri magici?** Assolutamente **no**, perché sebbene numeri magici come 2, 8, 20 siano facili da spiegare, già con  $A = 40$  e molto di più con  $A = 70$  si hanno risultati errati, e questo ha senso se si pensa che l'approssimazione è buona solo per basse energie. Quindi, quello che si fa è **provare altre forme di potenziale**, come ad esempio quello di **Woods-Saxon**. Questo è un potenziale 'furbo', perché ricalca l'andamento della densità nucleare. In corrispondenza del raggio nucleare la densità tende a zero e il potenziale pure: *-se non c'è densità non c'è potenziale-*

$$V = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$



Il problema dei numeri magici però **non è ancora risolto** e comunque **il modello ancora non restituisce con precisione gli stati fondamentali**. Ad esempio, il modello a questo punto ancora **non distingue** due accoppiamenti entrambi possibili  $\vec{L} + \vec{S} = 1/2$  e  $\vec{L} + \vec{S} = 3/2$ . Serve una correzione al potenziale che accoppia lo spin al momento angolare e questa non è altro che **la correzione di spin-orbita**. (credits to Maria Goeppert-Mayer e SÛS, che hanno copiato dalla fisica atomica l'idea). Aggiungo un potenziale contenente un termine operatoriale formato da  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  e lo moltiplico per la derivata del potenziale di W-S di modo che la correzione sia tanto più presente quanto più ci si avvicina ai **nucleoni di valenza**. Questo risolve il problema

$$V_{LS} = k \frac{dV(r)}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}$$



**Proviamo a calcolare questa correzione** nel caso di  $\ell = 1$  e  $s = 0$ . Dall'aritmetica delle somme vettoriali otteniamo due valori di  $J$  possibili:  $1/2$  e  $3/2$  e quindi

$$J = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot 2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \right) = -1$$

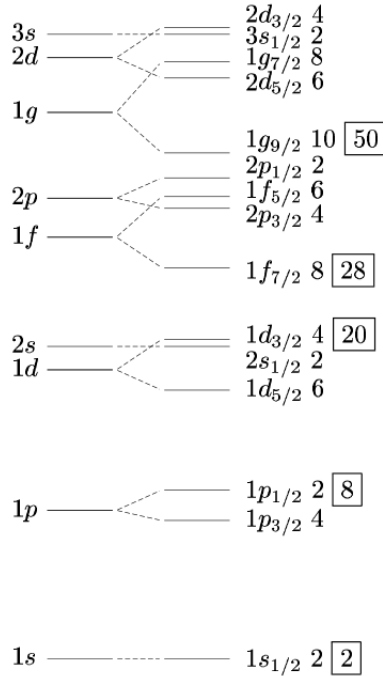
$$J = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot 2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \right) = +\frac{1}{2}$$

$$\Delta E_{LS} = -|k| \left( -1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} |k|$$

Quindi, è chiaro che questo contributo di spin-orbita farà splittare in due gli stati con lo stesso  $\ell$  e **uno scenderà mentre l'altro salirà**. Chi decide ciò è il segno della costante moltiplicativa  $k$ . Dagli esperimenti, si ottiene un  $k < 0$ , perciò è lampante che saranno i livelli con  $J$  maggiore a scendere in energia. Al salire di  $N$ , i livelli energetici sono difficili da determinare perché hanno una forte dipendenza sperimentale dal parametro  $k$ .

Quello che si ottiene è il seguente schema. Nella parte più a sinistra si hanno gli *shell* senza la correzione spin-orbita. Al centro, tenendo conto del termine di spin-orbita vi è lo *splitting* del  $j_{min}$  e del  $j_{max}$  con lo stesso  $\ell$ , che avviene nel modo appena commentato.





A titolo di **esempio**, prendiamo  $N = 2$ . Dalla  $N = 2n + \ell$  troviamo due coppie ( $n = 0, \ell = 2$ ) e ( $n = 1, \ell = 0$ ) che verificano entrambe l'equazione. Alla seconda coppia ( $\ell = 2$ ) è associata la lettera  $d$ , *diffuse*. Il numero davanti alla  $d$  è il numero quantico principale radiale  $n_r = n + 1$  perciò in questo caso  $n_r = 1$ . Il pedice invece si trova considerando  $j_{min}$  e  $j_{max}$  a partire dalla solita relazione  $|\vec{L} + \vec{S}| \leq \vec{J} \leq \vec{L} + \vec{S}$ . In questo caso si ha  $\ell = 2$  e  $s = \pm 1/2$  perciò le due *shell* saranno  $1d_{3/2}$  e  $1d_{5/2}$ , proprio come in figura.

Quando si ha un *gap energetico* consistente si hanno i numeri magici. Il livello  $1f_{7/2}$  scende in energia posizionandosi tra le shell con  $N = 2$  e  $N = 3$ , perciò costituisce da solo una sub-shell che dà origine al numero magico 28. L'ambiguità che c'è sul numero 40 è presto risolta vedendo che il *shell*  $1g_{9/2}$  scende molto e si discosta di pochissimo dal  $2p_{1/2}$ . A parità di **shell chiuse** è quindi molto più stabile un nucleo con  $A = 50$  che uno con  $A = 40$ .

Definiamo **shell di valenza** quella più alta in energia con degli stati occupati. Una *shell* di valenza sarà poi **aperta** se risulterà parzialmente occupata, oppure **chiusa** se tutti i posti disponibili saranno occupati da nucleoni. Finora abbiamo trattato la costruzione dello stato fondamentale di un nucleo, ovvero la configurazione in cui tutti i nucleoni disponibili (con due schemi separati per protoni e neutroni) occupano i livelli ad energia più bassa possibile. In questo modello, però un nucleo può trovarsi in un livello eccitato, ovvero una condizione in cui, a

partire dallo stato fondamentale, un nucleone riceve una eccitazione energetica e salta ad una (sub)shell superiore, il che significa che l'energia e il momento angolare del nucleo saranno in generale diversi. Osservando le transizioni tra stati è possibile costruire uno **schema dei livelli** per la descrizione degli stati eccitati dell'atomo e i decadimenti  $\gamma$  associati alle diseccitazioni.

## 7 Modello di Bohr e Mottelson (collettivo)

Questo modello, degli anni '50, si propone di descrivere le vibrazioni di un nucleo atomico inteso come una goccia di liquido **incomprimibile** ed **elastica**. Sondando il nucleo con diverse particelle e a **diverse energie** possiamo accedere a gradi di libertà diversi, via via più profondi. Dai 'viscosi' modi di superficie (**vibrazionali** e **rotazionali**), agli stati di singola particella (come abbiamo fatto anche nel modello a *shell*) fino alla *quark model structure* (fisica subnucleare).

Sperimentalmente si esaminano le *cross section* (sezioni d'urto). Per energie abbastanza piccole si trovano dei picchi (quindi una **struttura discreta**) e man mano che si sale, dopo aver superato le energie di separazione protonica e neutronica  $S_p$  o  $S_n$ , esse si addensano formando uno spettro continuo.

Nel modello collettivo, il nucleo è **una goccia di materiale nucleare con una forma specifica all'equilibrio** che può ruotare, **deformarsi e vibrare in senso quantistico** perciò noi ci limitiamo allo studio nello spettro discreto delle sezioni d'urto (basse energie).

### 7.1 Trattazione matematica (per sommi capi)

Invece di descrivere il sistema di  $A$  particelle con i  $3A$  gradi di libertà di tutti i nucleoni è possibile descrivere le proprietà di esso con un insieme ridotto di **parametri collettivi**  $\alpha_{\lambda\mu}(r_1, \dots, r_A)$  i quali punti sono la rappresentazione delle superfici deformate. Un esempio per poter carpire il senso è: data l'equazione dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{z^2}{R_z^2} = 1$$

semplicemente modificando i 3 parametri ottengo le varie forme, ( $R_x = R_y = R_z = 1$ ) è la sfera, ( $R_x < R_y = R_z$ ) è l'ellissoide oblatto..

Una forma generale per l'ellissoide si ottiene utilizzando le armoniche sferiche perciò, **espandendo il raggio nucleare in funzione di esse si ha**

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \alpha_{00} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right]$$

dove  $R_0$  è il raggio del nucleo di forma sferica. Il liquido è incompressibile perciò **rimuovo il termine di compressione**  $\alpha_{00}$  (infatti l'armonica sferica corrispondente è una costante che varia  $R_0$ ). Mi aspetto trasformazioni molto

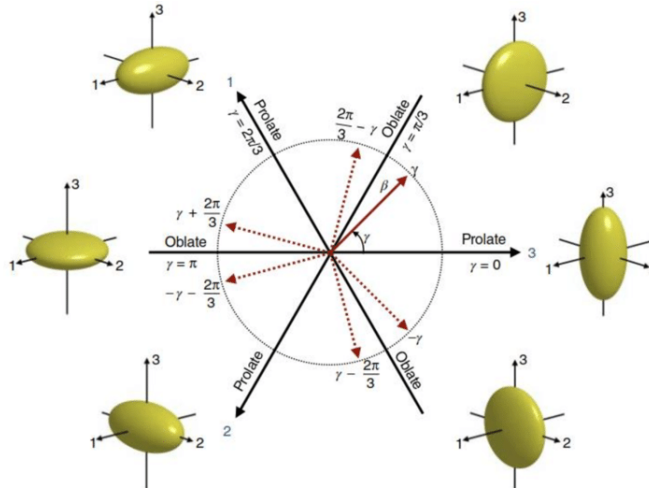
piccole  $\alpha_{ij} \ll 1$  e il termine di dipolo in questo caso ammonta a una traslazione lungo un asse, che **non cambia la forma del nucleo**. Trascuro poi termini di ottupolo ed esadecupolo (è molto difficile che un nucleo sia in una forma del genere in uno stato fondamentale). Resta solo quello di quadrupolo e noi tratteremo questo anche per una ragione empirica: il primo stato eccitato dei nuclei pari-pari risulta essere sempre un  $2+$ .

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu}^* Y_{2\mu}(\theta, \varphi) \right]$$

I parametri  $\alpha_{2\mu}$  sono 5 e 5 sono anche le armoniche sferiche  $Y_2^{-2}, Y_2^{-1}, Y_2^0, Y_2^{+1}, Y_2^{+2}$  vista la degenerazione in  $\mu$  (che non è altro che la solita  $m \in [-\ell, \ell]$ ). Assorbendo  $-1$  e  $-2$  in  $+1$  e  $+2$  rispettivamente, restano  $Y_2^{\pm 2}, Y_2^{\pm 1}, Y_2^0$ .

I 5 parametri trovati si riferiscono **al sistema di riferimento del laboratorio**. Però, qualunque sia la forma d'equilibrio e qualunque siano le energie di eccitazione delle vibrazioni, o le forze elastiche che riportano il sistema all'equilibrio, queste energie **non possono dipendere da come è orientato il sistema intrinseco rispetto al laboratorio**. Quindi, possiamo effettuare delle rotazioni *furbe* per **metterci sempre nel sistema intrinseco principale**. Per fare ciò svolgiamo una rotazione degli assi (tramite matrici di Wigner): un cambio di variabili in uno spazio a 5 dimensioni. Passo dalle 5 componenti di  $\alpha_{\mu,\nu}$ , alle 5 componenti di  $a_{\mu,\nu}$ , riscrivendole come il set  $(a_0, a_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . La trasformazione in questione è

$$a_{2,\nu} = \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2,\mu} D_{\mu,\nu}(\theta_i)$$



Mi disinteresso ora dei 3 angoli  $\theta$  di Eulero, poiché i parametri  $a_{2,0}$  e  $a_{2,2}$  raccolgono tutta l'informazione della dinamica di vibrazione quadrupolare. Vediamo

perché! Beh, per simmetria di un ellissoide  $a_{2,-1} = a_{2,+1} = 0$  e  $a_{2,2} = a_{2,-2}$  perciò i due parametri che rimangono sono

$$a_{2,0} = \beta \cos \gamma \quad a_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma$$

Questi due parametri costituiscono lo spazio polare in figura. Non serve però studiare tutto il piano, ci si può restringere ai soli primi  $60^\circ$ . Con queste due variabili, applicando le regole di quantizzazione in 5D di **coordinate generalizzate** (processo lungo e tedioso) si può scrivere una hamiltoniana quantistica che **descrive i moti vibrazionali quadrupolari attorno alla forma sferica**

$$H_B = T + V = \sum_{\mu} \left[ \frac{1}{2B_2} |\pi_{\mu}|^2 + \frac{C_2}{2} |\alpha_{\mu}|^2 \right]$$

Dove il termine in  $\pi$  sono i momenti coniugati e l'altro addendo è l'oscillatore armonico.

Si definisce il **parametro di deformazione**

$$\sum_{\mu} |\alpha_{\mu}|^2 = \beta^2$$

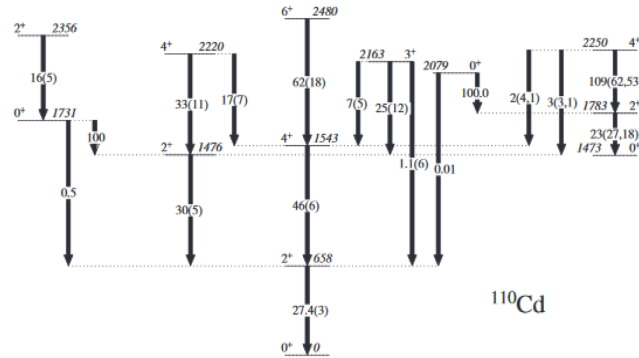
Schematizzando la hamiltoniana come

$$H_B = T_{vib} + T_{rot} + V$$

e poiché le variabili sono 5, la situazione è riconducibile a quella di un oscillatore armonico in  $d = 5$  del quale sappiamo che

$$E = \left( N + \frac{5}{2} \right) \hbar \omega \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{B}}$$

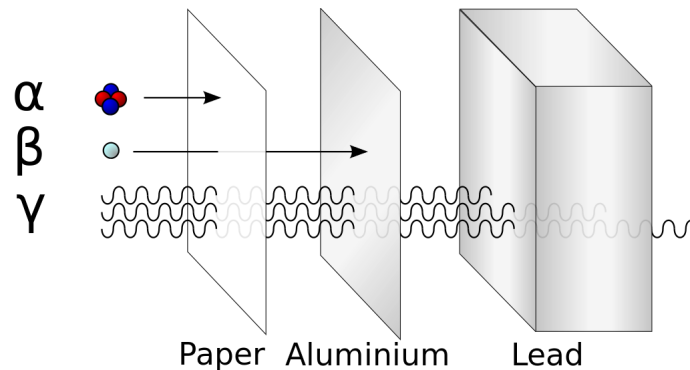
Si ha che il *gap* energetico tra un livello e l'altro è quindi costante (sono passi di  $\hbar \omega$ ). La degenerazione di questi stati, del tutto simile a quella del modello a *shell* in  $d = 3$  coinvolge nozioni molto difficili di teoria dei gruppi che non vengono trattate. Il modello è preciso per nuclei leggeri, per nuclei pesanti vanno aggiunti altri termini alla  $H_B$ . Un esempio lo si ha per il  $^{110}\text{Cd}$ .



## 8 Decadimenti

Un decadimento è un **processo** naturale o artificiale, in cui un nucleo emette massa e/o energia trasformandosi in qualcos'altro. Inizialmente su base fenomenologica che con il corso degli anni è stata formalizzata meglio, si distinguono tre tipi di decadimento  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

- $\alpha$  - Qui il nucleo formato è  ${}^4\text{He}$ , quindi parecchio massiccio e carico  $2^+$ . Questi nuclei sono i meno penetranti, si possono fermare con un fogli di carta.
- $\beta$  - Un neutrone del nucleo diventa protone  $\beta^-$  o viceversa ( $\beta^+$ ) emettendo leptoni carichi (rispettivamente un elettrone e un positrone). La radiazione  $\beta$  è mediamente penetrante, ovvero arrestabile con uno strato di metallo pesante, poiché composta da leptoni (dal greco  $\Lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\zeta$  - leggero) molto veloci.
- $\gamma$  - La radiazione  $\gamma$  è la comune radiazione elettromagnetica, molto penetrante e arrestabile per mezzo di materiali ad alto numero atomico  $Z$  (se ho calcestruzzo, quindi carbonio ed elementi leggeri ci vogliono parecchi metri, con il Piombo basta un piccolo strato).

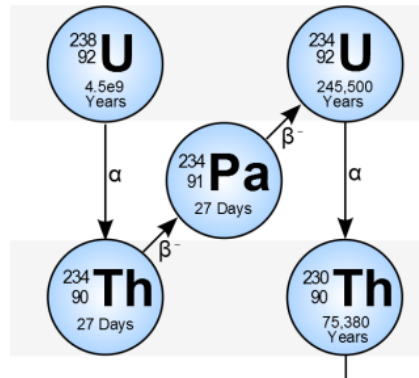


Per mezzo di uno spettrometro di massa possiamo controllare le tracce lasciate dai tre tipi di radiazione. La *gamma* non curva mentre  $\alpha$  e  $\beta$  lo fanno in due sensi diversi, portando all'evidenza che vi sono **due diversi tipi di carica** e inoltre la radiazione  $\alpha$  deve avere anche massa maggiore. Ricordo la formula del raggio di ciclotrone

$$r_{\text{ciclotrone}} = \frac{mv}{qB}$$

Questa distinzione di carica la si trova anche facendo passare gli stessi 3 raggi all'interno delle armature di un condensatore.

Questi tre tipi di radiazione **non sono indipendenti**. Lo stesso atomo infatti può portare a tutti e tre i tipi di radiazione. In particolare, il secondo  $\beta^-$  della figura qui sotto può portare ad uno stato eccitato del  ${}^{234}\text{U}$  che decadrebbe  $\gamma$  fino allo stato fondamentale.

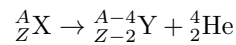


Ora andiamo più nei particolari

## 8.1 Decadimento $\alpha$

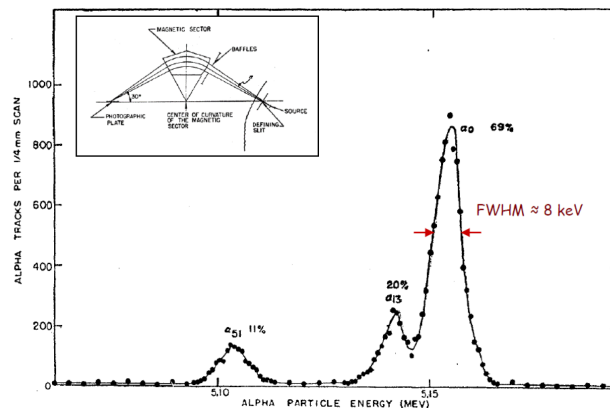
### 8.1.1 Caratteristiche principali

I **nuclei pesanti** emettono radiazione poco penetrante sotto forma di particelle con carica positiva: nuclei di  $^4\text{He}$  con energia  $\approx 4 - 8$  MeV e con vita media **su diversi ordini di grandezza**, dipendente in modo approssimativamente esponenziale dall'energia.



Il nucleo di elio-4 che viene emesso è particolarmente stabile, si trova in fatti all'incrocio di un numero magico di protoni e neutroni (2) che va quindi a chiudere la *shell*  $1s_{1/2}$  avente  $N=0$ .

Proviamo a studiare uno spettro sperimentale, quello del  $^{239}\text{Pu}$ .



Ci sono tre picchi perché sono tre i possibili canali di decadimento  $\alpha$  possibili per questo isotopo del Plutonio. Ciascuno ha probabilità diverse e questo si riflette in tre diversi numeri di conteggi. Per ciascun canale di decadimento  $\alpha$  è possibile una sola energia (il decadimento è **monocromatico**). Noi vediamo una gaussiana per via della non-ideale risoluzione sperimentale.

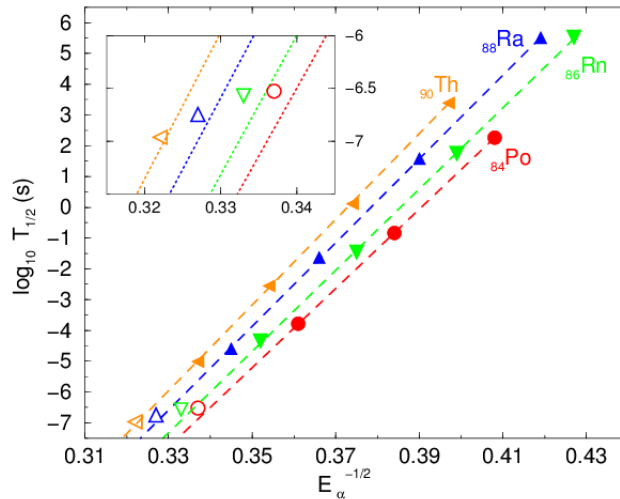
**I tempi di decadimento hanno una forte dipendenza dalla energia cinetica.** Le energie cinetiche variano tra circa, come detto prima, 4 – 8 MeV ma anche in questo ristretto *range* di energie le vite medie variano tra più di 20 ordini di grandezza. **Controtuitivamente** poi, aumentando  $Z$  aumenta anche la vita media. Ed è proprio per questo motivo che elementi leggeri che decadono  $\alpha$  non si vedono in natura (hanno vite medie troppo basse, sono tutti già decaduti). Elementi più pesanti si vedono, ed elementi ancora più pesanti no, perché si alza la probabilità di fissione spontanea.

I decadimenti  $\alpha$  che si osservano sono relativi ad un particolare spessore della barriera di potenziale che fa sì che si vedano i nuclei decadere.

### 8.1.2 Legge di Geiger-Nuttal

Questa legge empirica mette in relazione il tempo di decadimento (o vita media, o costante di decadimento) con l'energia cinetica delle particelle  $\alpha$  emesse, pari al Q-valore della reazione. Come abbiamo visto, mentre quest'ultima varia in un *range* limitato 4 – 10 MeV, le vite medie differiscono di 15 o più ordini di grandezza.

$$\ln t_{\frac{1}{2}} \propto \frac{1}{\sqrt{Q}} \quad t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$



### 8.1.3 Condizione energetica di decadimento

**Quando il processo spontaneo è possibile?** Partiamo dal definire la variazione di massa nucleare  $\Delta M$

$$M(A, Z) > M(A - 4, Z - 2) + M(4, 2) \\ \Rightarrow \Delta M = M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)$$

Poi definiamo il **Q-valore** come  $Q = -\Delta M \cdot c^2$  e quando questo sarà strettamente positivo il processo di decadimento sarà spontaneo. Da qui si ha anche la risposta ad una domanda ben più importante: **perché mai solo elio-4 e non altri elementi leggeri come litio-6 o trizio?** Perché calcolando il Q-valore per i decadimenti : a tutti gli altri devo quindi fornire energia affinché avvenga il decadimento. Poi approfondiamo meglio le condizioni di decadimento legate al Q valore.

Possiamo anche provare a capire **come si ripartisce l'energia nel decadimento**. Ci attendiamo che la particella  $\alpha$  dia molto più veloce del nucleo figlio, in quanto la differenza di massa è molto significativa per nuclei con  $A$  alti. Denotando il decadimento come  $X \rightarrow Y + \alpha$  e utilizzando la conservazione del momento e dell'energia si giunge a

$$\vec{P}_\alpha = -\vec{P}_Y \Rightarrow |\vec{P}_\alpha| = |\vec{P}_Y| = P \\ \frac{P^2}{2M_\alpha} + \frac{P^2}{2M_Y} = E \Rightarrow E_\alpha \left( 1 + \frac{M_\alpha}{M_Y} \right) = E \Rightarrow E_\alpha = \frac{EM_Y}{M_Y + M_\alpha} \approx E$$

e l'ultima approssimazione si può fare perché si ha a che fare con  $Y$  con  $A \approx 200$ , molto più pesanti dell'  ${}^4\text{He}$ . Da questo capiamo che la particella  $\alpha$  **trasporta tutta l'energia liberata nella reazione**.

Sono possibili anche decadimenti  $\alpha$  da stati eccitati. Tramite una reazione nucleare posso creare un nucleo instabile molto pesante in uno stato eccitato **con il canale  $\alpha$  aperto**.

**Per quali A e Z il decadimento  $\alpha$  è possibile?** Partendo dalla SEMF

$$Q = -\Delta M = M_X - M_Y - M_\alpha = \\ = Zm_p + Nm_n - AB_X - (Z - 2)m_p - (N - 2)m_n + (A - 4)B_Y - 2m_p - 2m_n + 4B_\alpha \\ A(B_Y - B_X) - 4(B_Y - B_\alpha) > 0$$

dove le masse si elidono perché la massa totale si conserva. Si trova quindi  $Q > 0$  per  $A > 60$ , **ma non avevamo parlato di nuclei molto più pesanti?** Sì, ma la possibilità di decadere  $\alpha$  parte da un  $A$  molto più basso e nell'intervallo da 60 - 200 sono altri i tipi di decadimento favoriti. Infatti, **i decadimenti  $\alpha$  osservati hanno un  $Q \approx 4 \text{ MeV}$**  e con queste energie  $A \approx 200$ . Diminuendo  $Q$  inoltre le vite medie si allungano a dismisura facendo sì che sia molto difficile



osservare i decadimenti. Vi sono però due eccezioni, ovvero i decadimenti di **neodimio** e **disprosio**, che avvengono sulla stessa colonna con  $N = 84$ . Questo perché il decadimento  $\alpha$  li porta alla chiusura della *shell* per i neutroni con  $N = 82$ , configurazione molto stabile e a energia inferiore.

#### 8.1.4 Teoria elementare del decadimento $\alpha$ (Gamow)

##### Perché le vite medie variano così tanto nel ristretto range di energie?

Con un **approccio** classico, supponendo che la particella  $\alpha$  sia pre-creata, si può calcolare il tempo medio che ci metterebbero le particelle  $\alpha$  ad attraversare il nucleo di raggio  $R$ .

$$t = \frac{R}{v_\alpha} = R \sqrt{\frac{m_\alpha}{2E_\alpha}} = \frac{R}{c} \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{2E_\alpha}} \approx 7 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

Eppure sappiamo che le vite medie possono essere anche di qualche milione di miliardi di anni!

Con un minimo di razionalità ci si può subito rendere conto che una particella  $\alpha$  non può attraversare indisturbata un nucleo estremamente denso ed elettricamente carico: vi saranno delle interazioni che possiamo approssimare coulombiane. Il potenziale centrale sentito da una particella è un potenziale nucleare all'interno e uno coulombiano all'esterno. Il valore per la barriera a una distanza pari al raggio nucleare risulta

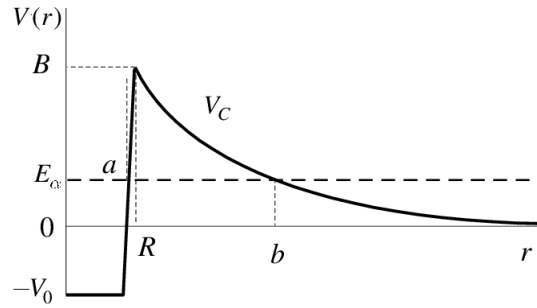
$$U_c = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 30 \text{ MeV}$$

se prendiamo l'esempio del torio. Una particella  $\alpha$  però non possiede un'energia neanche vicina a 30 MeV (ricordiamo i circa 4–10 MeV). Classicamente **non ci si può spiegare** il fenomeno in questione. Ci sono voluti **Gamow, Condon e Gurney** (1929) i quali sostanzialmente lo spiegano con l'effetto tunnel.

Nella **teoria elementare del decadimento  $\alpha$**  si suppone che la **particella sia preformata** ed essa si muove nel potenziale centrale del nucleo figlio. La sua probabilità di uscire è legata alla probabilità di penetrazione di una barriera di potenziale che è legata alla vita media. Reinterpretando il problema in termini probabilistici, va stimata la probabilità che la particella sia preformata  $P_\alpha$ . Si calcola la probabilità di transizione tra un nucleo con  $A$  corpi  $\psi(R_1, \dots, R_A)$  e un nucleo  $\psi(R_1, \dots, R_{A-4}) \otimes \psi_\alpha \otimes \phi(R_\alpha)$  (nucleo  $Y$  rimanente, particella  $\alpha$  e allontanamento radiale). L'integrale che va risolto è

$$P(R_\alpha) = |\langle \psi_A | \psi_{A-4} \otimes \psi_\alpha \rangle|^2$$

Noi nel modello supponiamo sia pari all'unità. Ora, da osservazioni sulla buca di potenziale si ha



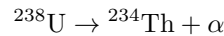
$$r = R \Rightarrow V(R) = B$$

$$r = b \Rightarrow V(b) = Q$$

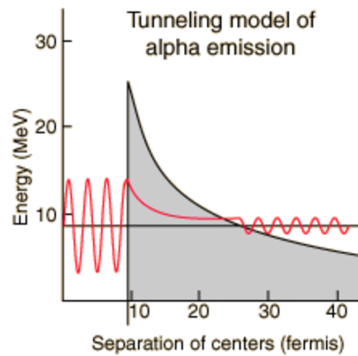
e da questo, prendendo semplici rapporti si ricava

$$\frac{b}{R} = \frac{B}{Q} \Rightarrow b = \frac{RB}{Q}$$

Numericamente, nel caso del primo  $\alpha$  dell'uranio-238



in cui si ha un  $Q$  valore del *ground state*  $Q_{gs} = Q = 4.268$  MeV, un raggio  $R = 1.2(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \approx 9.3$  fm. Si ottiene che  $B \approx 26$  MeV e  $b = 63$  fm. La barriera quindi risulta molto estesa!



Secondo la meccanica quantistica e la teoria dell'effetto tunnel la nostra funzione d'onda oscilla all'interno della buca con numero d'onda

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m_\alpha(Q + V)}{\hbar^2}}$$

Va poi come un esponenziale smorzato all'interno della barriera di potenziale con numero d'onda

$$k_2(r) = \sqrt{\frac{2m_\alpha(V(r) - Q)}{\hbar^2}}$$

e torna ad oscillare all'esterno con vettore d'onda

$$k_3 = \sqrt{\frac{2m_\alpha(Q)}{\hbar^2}}$$

Quello che si vuole valutare è il **fattore di trasmissione** e per farlo si spezzetta la parte di potenziale in grigio in rettangoli infinitesimi di spessore  $dr$  e altezza costante e si stima il coefficiente di trasmissione per ognuna delle barriere infinitesime.

$$\begin{aligned} \psi_{out}(r + dr) &= e^{-k_2(r)(r+dr)} & \psi_{in}(r) &= e^{-k_2(r)r} \\ \Rightarrow T_{diff} &= \left| \frac{\psi_{out}(r + dr)}{\psi_{in}(r)} \right|^2 = \frac{e^{-2k_2(r)r} e^{-2k_2(r)dr}}{e^{-2k_2(r)r}} = e^{-2k_2(r)dr} \end{aligned}$$

Ricordando però che la barriera è composta da **infiniti** spessori infinitesimi  $dr$  integriamo da  $R$  a  $b$ . Da qui si definisce il **fattore di Gamow**  $G$ .

$$T_{tot} = e^{-2 \int_R^b k_2(r) dr} = e^{-2G}$$

**La probabilità va come un esponenziale decrescente in  $G$ .** Nel caso di potenziale coulombiano, la formula esplicita è

$$G = 2\alpha Z \sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} \left[ \arccos \sqrt{\frac{Q}{B}} - \sqrt{\frac{Q}{B}} \sqrt{1 - \frac{Q}{B}} \right]$$

A titolo di esempio, con il  $^{238}\text{U}$  si ha  $Q = 4.269$  MeV,  $B = 27.87$  MeV da cui  $G = 44.391$ . Se  $Q$  fosse più alta anche di un solo MeV si avrebbe  $G = 36.047$  e poiché il coefficiente di trasmissione scala come  $e^{-2G}$  il caso di  $Q$  più basso ha una probabilità di *tunneling* pari a  $5.7 \cdot 10^{-8}$  volte quella del caso a energia più alta (di un solo MeV).

Mettendo insieme tutto e volendo legare questi risultati alla vita media, osserviamo che la **costante di decadimento** è legata a:

- probabilità di pre-formazione  $P_\alpha$
- fattore di trasmissione  $e^{-2G}$
- frequenza  $f$  di arrivo alla barriera

Otteniamo quindi

$$\lambda = P_\alpha \cdot f \cdot e^{-2G}$$

Numericamente, per il  $^{238}\text{U}$  si trova, usando  $G \approx 44$ ,  $P_\alpha \approx 1$ ,  $f \approx 10^{21}$  Hz

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

La stima è ragionevole entro qualche ordine di grandezza, ma non precisissima a causa delle numero approssimazioni effettuate per giungere ad essa. Abbiamo comunque svelato il mistero delle vite medie, che trova spiegazione nell'effetto tunnel (*N.d.A.* Marchetti, spiegando l'effetto tunnel faceva notare come il coefficiente di trasmissione tendesse a 1 per  $E \sim B$ , proprio perché andando a energie confrontabili con l'altezza della barriera coulombiana facciamo sì che  $G \rightarrow 0$  e quindi  $T = e^{-2 \cdot 0} = 1$ ).

## 8.2 Decadimento $\beta$

Il decadimento  $\beta$  è il processo che **tende ad ottimizzare il rapporto N/Z**, è **dovuto all'interazione debole** che cambia neutrone in protone (o viceversa)<sup>2</sup> emettendo una coppia leptone-antileptone. Sono 3:  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  e cattura elettronica. Rispettivamente

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu$$

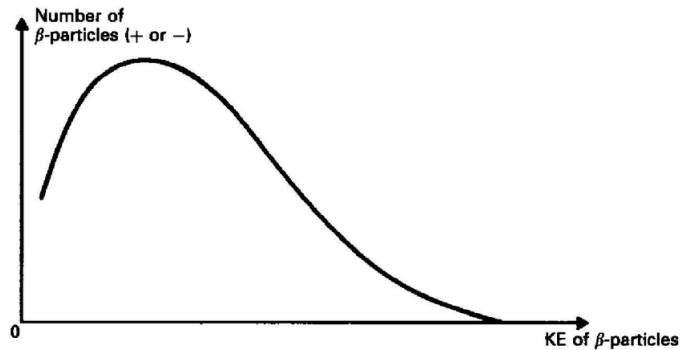
$$p + e^- \rightarrow n + \nu$$

Questo tipo di decadimento lo abbiamo trovato nelle parabole di massa quando si parlava del modello a goccia di fluido e della SEMF. Un'altra cosa da notare, che sarà chiara in subnucleare, è la conservazione del numero leptonic, che **obbliga il decadimento ad essere un decadimento a tre corpi**. Infatti, fu questo uno degli indizi che portarono Fermi alla totale comprensione del decadimento.

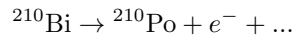
A differenza del decadimento  $\alpha$  qui non possiamo pensare che l'elettrone sia pre-formato e quindi **la soluzione è diversa**. In prima approssimazione inoltre, lo spettro energetico che si ottiene è **continuo**, a differenza di quello monocromatico dell'alfa ( $\text{KE} = \textit{kinetic energy}$ ).

---

<sup>2</sup>Per non avere dubbi sulla distinzione immediata dei decadimenti basta pensare alla conservazione della carica elettrica: un elemento che fa decadimento  $\beta^+$ , ovvero dove un protone diventa neutrone deve, per via della conservazione, espellere un positrone.



Per continuare, ragioniamo sui numeri di uno specifico decadimento  $\beta$



Si ha  $M_{\text{Bi}} = 209.9842 \text{ u}$  e  $M_{\text{Po}} = 209.9829 \text{ u}$  con una  $\Delta M = 1.16 \text{ MeV}$ . Nel grafico precedente, il punto di incrocio con l'asse x a destra è definito come **end-point energy** e si trova, nello spettro di questo decadimento, una *end-point energy* pari proprio a  $1.16 \text{ MeV}$ . Questo dato è in completo accordo con i dati sperimentali. Lo spettro continuo però, perciò vi sono infiniti modi in cui l'energia si può spartire tra le particelle. Questo è un problema che ha turbato a fondo i fisici fino a Wolfgang Pauli.

### 8.2.1 Ipotesi di Pauli

Wolfgang, vedendo che la carica si conserva non pensa ad una particella dotata di carica intrinseca. Inoltre, deve conservarsi anche il momento angolare a allo stato dell'arte certamente non succede perché c'è solo un elettrone. Perciò la terza particella dev'essere un fermione. Pauli la chiama **neutrone**, poi Fermi e Amaldi la rinominano in **(anti)neutrino** perché è ancora più leggera del già leggero elettrone. Non si ha una misura precisa ma si sa che certamente  $m_\nu < 2 \text{ eV}$ .

### 8.2.2 Teoria di Fermi

Fermi riceve il premio Nobel proprio mettendo assieme la Golden Rule e modello a gas di Fermi. Il ragionamento parte da alcune assunzioni di base:

- Si trascura interazione coulombiana tra nucleo ed elettrone (valido almeno per  $Z < 10$ )
- Si trascura il rinculo del nucleo figlio (persino nel decadimento  $\alpha$  l'energia trasferita al nucleo pesante era trascurabile e qui si ha uno squilibrio di masse ancora più significativo )
- Si considera nulla la massa del neutrino

- Si considerano egualmente probabili tutte le possibili suddivisioni delle energie

Con la teoria di Fermi si spiegano:

- La forma degli spettri  $\beta$  (capendo come si spartiscono l'energia l'elettrone e  $\nu$ )
- La relazione tra energia massima del decadimento e la vita media
- La classificazione delle transizione  $\beta$  e le regole di selezione

Il decadimento  $\beta$  a tre corpi dipende sostanzialmente dal **Q-valore del processo, il momento angolare della particella emessa, la carica nucleare, la natura degli stati iniziale e finale.**

### 8.2.3 Regola d'oro di Fermi

Le relazione più importante della teoria di Fermi è la **Golden Rule**, regola che permette di calcolare la **probabilità di transizione** tra uno stato iniziale e uno finale  $i \rightarrow f$  e che è legata alla vita media come  $t_{1/2}^{-1}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \frac{dn}{dE}$$

$M$  è l'elemento di matrice dell'operatore di transizione  $H$ , calcolata a partire appunto dagli stati iniziale e finale.

$$M = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* H \psi_i d\vec{r}$$

Il fattore  $dn$  è il numero di stati finali con energia tra  $E$  e  $E + dE$  e quindi dividendolo ancora per  $dE$  si ottiene **la densità di tali stati**. Questo è chiamato anche **fattore cinematico** e la sua espressione viene dal modello nucleare del gas quantistico, elaborato dallo stesso Fermi. **In presenza di tanti stati finali la probabilità è maggiore.**

### 8.2.4 Spettro energetico

Andiamo a studiare meglio lo spettro energetico. Un'ipotesi buona per iniziare è porre la massa del neutrino pari a 0. La conservazione dell'energia è quindi pari all'energia dell'elettrone e quella del (anti)neutrino ( $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ )

$$Q = E_e + E_\nu = T_e + m_e c^2 + cp_\nu \Rightarrow T_e^{max} = Q = E_0 - m_e c^2$$

Serve un altro ingrediente: dal modello a gas di Fermi sappiamo che, rispettivamente per elettrone e per (anti)neutrino si ha

$$dN_e = V \frac{4\pi p_e^2 dp_e}{h^3} \quad dN_\nu = V \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^3}$$

In totale, basta fare il prodotto e si ottiene un integrale 6D molto complesso

$$dN = dN_e dN_\nu = \left( \frac{4\pi V}{h^3} \right)^2 p_\nu^2 p_e^2 dp_e dp_\nu$$

Dal vincolo totale sull'energia, fissata  $E_e$ , ovvero data un'energia con cui l'elettrone esce dal nucleo si ha

$$E_\nu = p_\nu c = E_0 - E_e \Rightarrow dp_\nu = \frac{dE_0}{c}$$

Dividendo il primo membro dell'equazione per  $dE_0$  si ottiene la forma finale, ovvero una parabola con concavità verso il basso quadratica nelle energie.

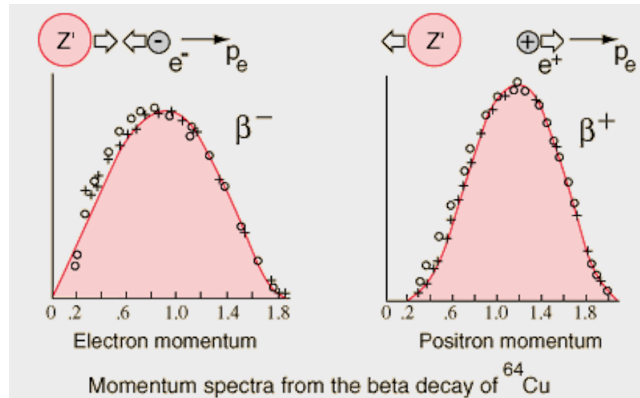
$$\frac{dN}{dE_0} = \left( \frac{4\pi V}{h^3} \right)^2 \frac{1}{c^2} (E_0 - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

Inserendo tutto nella *golden rule* si ottiene la **probabilità di disintegrazione con momento tra  $p_e$  e  $p_e + dp_e$**   $d(\lambda_{p_e}) = C|M|^2(E_0 - E_e)^2 p_e^2 dp_e$ , dalla quale integrando si ottiene

$$\lambda = \int_0^{p_{e,max}} |M|^2 (E_0 - E_e)^2 p_e^2 dp_e \Rightarrow \lambda \simeq C|M|^2 f(E_0)$$

Con  $f(E_0)$  si intende l'**integrale di Fermi**, che ha valori tabulati.

Nella precedente trattazione si è completamente lasciata da parte l'interazione coulombiana esercitata tra il nucleo e l'elettrone che esce. Dagli spettri sperimentali si vede che **elettroni e positroni hanno una distribuzione asimmetrica in energia**. È ragionevole, se si pensa che il nucleo è un ammasso di carica positiva che quindi cercherà di **attrarre** a se l'elettrone o di **spingere** il positrone del decadimento  $\beta^+$ . Esempio seguente per il rame



Ciò che si fa per tenere conto di questa distorsione del campo coulombiano è correggere l'integrale di Fermi con il **parametro di Sommerfeld**  $\eta = \mp \frac{Ze^2}{\hbar v_{e,as}}$

$$F(Z, E_e) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}$$

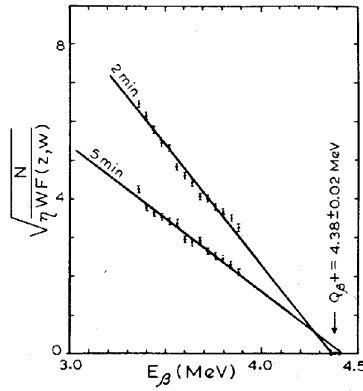
La formula definitiva, con il fattore correttivo, è

$$d(\lambda_{p_e}) = C|M|^2 F(Z, E_e)(E_0 - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

che, per studiarla, non c'è il bisogno necessario di integrarla. Infatti, prendendo la grandezza definita come **variabile di Kurie** (da non confondere con i Curie)

$$K(E_e) = \sqrt{\frac{\frac{d\lambda(p_e)}{dp_e}}{p_e^2 F(Z, E_e)}} \propto E_0 - E_e$$

e graficandola si ottiene un cosiddetto **Kurie-Plot**



Essendo questo lineare nell'energia, ci permette di calcolare la *end point* energy con un fit lineare per ogni singolo nucleo. Ci permette di osservare anche **transizioni multiple**, che avvengono in nuclei come ad esempio quello del ferro. Nel precedente grafico, vediamo una **transizione doppia** nel caso dello  $^{121}\text{Xe}$ . Si è anche osservato il decadimento  $\beta$  del  $^{59}\text{Fe}$  dove è presente un *kink* che da origine anch'esso ad una transizione doppia.

Vediamo ora come ricavare informazioni sulla **massa del neutrino** grazie appunto a questi Kurie-Plot. La variabile di Kurie che si andrà a costruire sarà dipendente anche dalla massa del neutrino, che da ora in poi supporremo diversa da  $0$   $m_\nu \neq 0$ . Quindi, appunto, l'energia conterà anche del termine di massa a riposo  $E_\nu = \sqrt{m_\nu^2 c^4 + p_\nu^2 c^2}$

$$E_0 = E_e + E_\nu \Rightarrow p_\nu^2 c^2 = (E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4$$

Cercando in modo separato una formula per  $p_\nu$  e una per  $p_\nu dp_\nu$  si trova

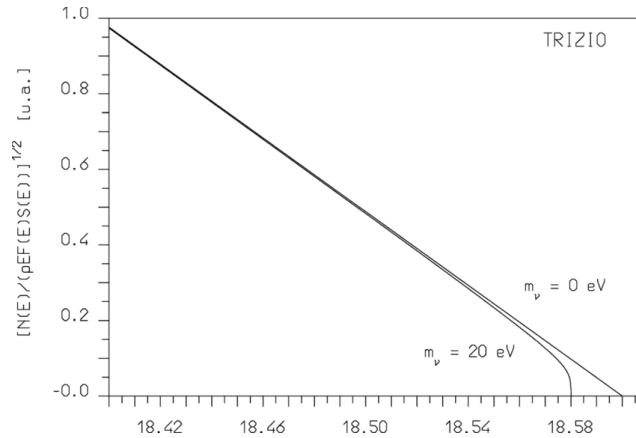
$$p_\nu = \sqrt{\frac{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4}{c^2}} \quad p_\nu dp_\nu = \frac{(E_0 - E_e) dE_0}{c^2}$$

Che messe assieme danno una formula non più quadratica nell'energia, ma vi è un contributo che dipende dalla massa del neutrino

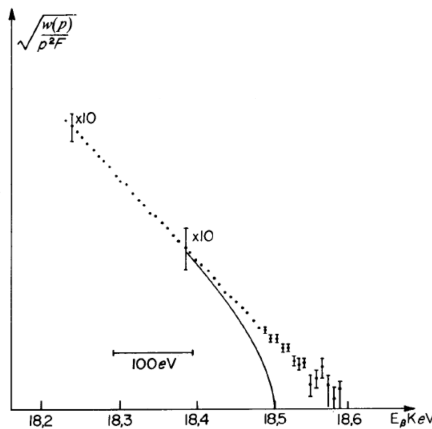
$$p_\nu^2 dp_\nu = \frac{1}{c} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4} (E_0 - E_e) dE_0$$



In questa ipotesi, il Kurie-Plot **non è più lineare**. In particolare, ha deviazioni per energie vicine all'*end-point*, dalle quali si può dare una stima della massa del neutrino.



Facendo ipotesi per la massa del neutrino fino all'ordine di decine di eV, trovo che i dati sperimentali si discostano significativamente dalla curva teorica. Questo è sinonimo del fatto che il neutrino è estremamente leggero ed è difficile stimare con esattezza la sua massa. Con il Kurie-Plot del **Trizio** arrivo ad affermare che questa massa non può essere maggiore di 100 eV.



Al giorno d'oggi si hanno altre stime:

- Dagli esperimenti di Mainz e Troitsk  $m_{\nu_e} \leq 2.2$  eV; (95% C.L.)
- Dall'esperimento KATRIN (2019)  $m_{\nu_e} \leq 1.1$  eV; (90% C.L.)

### 8.2.5 Regole di selezione

Vi sono dei decadimenti  $\beta$  che fanno capire che essere guidati solo dal guadagno energetico nel comprendere i decadimenti è un errore. Vi sono infatti delle ulteriori **regole di selezione** che emergono da uno studio approfondito dell'elemento di matrice  $M$  della *Golden Rule* di Fermi. La trattazione dell'elemento di matrice  $M$  resta comunque mancante. Ricordando allora la regola di Fermi  $\lambda = C|M|^2 f(Z, E_0)$  e sapendo che

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{C|M|^2 f(Z, E_0)} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} f(Z, E_0) = \frac{K}{|M|^2}$$

Dove il termine di sinistra dell'equazione viene definito come **ft-value**, e questo è tanto più piccolo quanto è più grande il valore dell'elemento di matrice. Per valori

- $\log f_t \approx 3 \div 4$  si parla di decadimenti **super-permessi**;
- $\log f_t \approx 20$  si parla di decadimenti **quarto proibiti**.

Considerando, nell'intermezzo, una zoologia di casi alternativi. Studiamo ora l'elemento di matrice  $|M|$

$$M = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* H \psi_i d\vec{r}$$

e partiamo fattorizzando la  $\psi_f$ , che, in un generale decadimento  $\beta$  sarà prodotto di

$$\psi_f = \psi_f^{\text{nucleo}} \cdot \psi_f^{\text{leptone}} \cdot \psi_f^{(\text{anti})\text{neutrino}} = \psi_f^{\text{nucleo}} \cdot \psi_f^{\text{leptonica}}$$

Assumiamo che a grandi distanze, la parte leptonica sia un'onda piana

$$\psi_f \approx e^{-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \quad \vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}_\nu$$

Assumendo  $r \approx R_{\text{nucleo}} = 4$  fm, tipicamente poi per un elettrone con energia  $\approx 1$  MeV si ha  $p \approx 1.4$  MeV/c possiamo valutare in modulo l'esponente dell'onda piana che vale  $\approx 0.03$ . Notando che  $|\vec{p}\cdot\vec{r}| \approx |\vec{p}\times\vec{r}| = |\vec{L}|$ , il momento angolare è molto basso e dato che questo deve assumere valori interi possiamo dire che la funzione d'onda è prevalentemente di tipo  $s$ , che fisicamente corrisponde ad un'onda sferica. Posso quindi sviluppare in serie di McLaurin

$$e^{-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \approx 1 - i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} + \dots \approx 1$$

e infatti si trova che  $|M|$  non dipende, nella  $\psi_f$ , dalla parte leptonica (dal momento dei leptoni) e queste le chiamo **transizioni permesse**. A seconda poi del termine che considero nello sviluppo avrò primo, secondo, terzo e quarto proibito. Se però stato iniziale e finale hanno parità diverse,  $L$  deve essere dispari e quindi il primo termine dell'esponenziale non è ammesso e si deve utilizzare il secondo (è proprio la variazione dei momenti angolari che distingue

le trasmissioni e detta le regola di selezione). Transizioni per le quali valgono solo termini successivi sono dette **proibite** (meno sfavorevoli e dell'ordine pari al primo termine valido)

Ma come è fatta **H**? **H** è l'**hamiltoniana debole**, della forma

$$H = g \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu)$$

dove  $\vec{r}_e$  è il vettore posizione dell'elettrone,  $\vec{r}_\nu$  quello del neutrino,  $\vec{r}$  quello del nucleo iniziale che subisce il decadimento e  $g$  la **costante universale del decadimento**  $\beta$  o **costante di interazione debole**. Le delta indicano che vi è interazione tra elettrone (o neutrino) e il nucleo solo se questi sono sovrapposti: si parla di **interazione di contatto**. Possiamo ora calcolare esplicitamente l'elemento di matrice

$$\begin{aligned} M &= \int \psi_f^* \cdot H \cdot \psi_i d\vec{r} = \\ &= g \int \psi_e^*(r_e) \cdot \psi_\nu^*(r_\nu) \cdot \psi_{n_{\text{finale}}}^*(r) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) \cdot \psi_{n_{\text{iniziale}}}(r) dr_e dr_\nu dr = \\ &= g \int \psi_e^*(r) \cdot \psi_\nu^*(r) \cdot \psi_{n_{\text{finale}}}^*(r) \cdot \psi_{n_{\text{iniziale}}}(r) dr \end{aligned}$$

Ora, come prima, assumiamo la  $\psi_f^{\text{leptonica}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  e espandendola all'ordine zero si ottiene

$$M = \frac{g}{V} \int \psi_{n_{\text{finale}}}^*(r) \cdot \psi_{n_{\text{iniziale}}}(r) dr = \frac{g}{V} M_{if}$$

Quindi tanto più grande il grado di sovrapposizione tra stato iniziale e stato finale tanto più il decadimento è permesso.

Indicando con  $\vec{L}$  la variazione, nel passaggio tra due stati, del momento angolare orbitale dei due leptoni  $e$  e  $\nu$  (pensato come  $\Delta L$ ), con  $\vec{S}$  (pensato come  $\Delta S$ ) il loro accoppiamento di spin e con  $\vec{I}_i, \vec{I}_f$  i momenti angolari totali del nucleo prima e dopo la transizione, si può scrivere in generale che

$$\vec{I}_f = \vec{I}_i + \vec{L} + \vec{S}$$

Nel caso del momento di spin e per il fatto che  $e$  e  $\nu$  sono due fermioni allora, dalle regole di composizione,  $S \in (0, 1)$ . Il primo caso corrisponde al decadimento con i due leptoni antiversi  $\uparrow\downarrow$  e si dice **transizione di Fermi**, mentre il secondo corrisponde al caso in cui escono con spin paralleli  $\uparrow\uparrow$  o  $\downarrow\downarrow$  e si dice **transizione di Gamow-Teller**.

La transizione  $0^+ \rightarrow 0^+$  può essere solo di Fermi. Se infatti facciamo il conto,  $\vec{I}_i = 0, \vec{I}_f = 0 = \vec{L} + \vec{S}$ . Prendere  $\vec{L} = 1$  non lo posso fare perché la parità è invariata nella transizione. Quindi per forza  $\vec{L} = 0$  e  $\vec{S} = 0$  (con  $\vec{S} = 1$  non trovo 0).

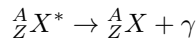
All'interno delle transizioni permesse vi sono quelle **super-permesse** e sono quelle in cui un protone (neutrone) nello stato finale si ritrova nello stesso stato del neutrone (protone) iniziale. Tradotto matematicamente: elemento di matrice praticamente pari all'unità e di conseguenza  $\log f_t$  piccolo. È il caso dei decadimenti tra nuclei speculari come ad esempio  $^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O}$ . Si trasforma un protone nella  $d_{5/2}$  in un neutrone della stessa subshell:  $I_f = I_i = 5/2^+$  e quindi  $\Delta P = 0$ ,  $\Delta I = 0$ , sia Fermi che Gamow-Teller e  $\log ft \sim 3.5$ . Solitamente, se la parità è invariata ma varia il momento totale le transizioni sono di Gamow-Teller.

Per le transizioni proibite, consideriamo lo sviluppo in serie

$$e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \approx 1 - i\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)^2 + \dots$$

### 8.3 Decadimento $\gamma$

Il decadimento  $\gamma$  avviene tra stati diversi di uno stesso nucleo. Ad esempio, a seguito di un decadimento  $\beta$ , il nucleo finale può trovarsi in uno stato eccitato che, per  $A$  molto grandi, fissionerebbe spontaneamente. Tuttavia, per numeri di massa più piccoli, ciò è improbabile e avviene che il nucleo passi da stati eccitati a stati ad energia inferiore emettendo fotoni  $\gamma$  (radiazione ad alta frequenza, sotto i raggi X come lunghezza d'onda)



#### 8.3.1 Osservazioni energetiche

I raggi  $\gamma$  emessi hanno un'energia che sta nell'intervallo  $0.1 \div 10$  MeV

- Dalla legge di Planck  $E = h\nu = hc/\lambda$  si ha che per un fotone di 1 MeV  $\lambda = 1240$  fm, lunghezza d'onda molto piccola rispetto alle dimensioni atomiche, ma grande rispetto a quelle nucleari; per questo motivo quindi possiamo immaginare che tutti i nucleoni percepiscano lo stesso valore di campo elettromagnetico dell'onda.
- Dal principio di indeterminazione per energia e tempo, prendendo  $\tau = 1$  ps si ha  $\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau} = 0.66 \cdot 10^{-3}$  eV mentre la risoluzione energetica sperimentale (la migliore è quella dei rivelatori al germanio) è un milione di volte più grande ( $\sim 2$ keV). Posso quindi considerare spettri discreti.

**Come si spartisce l'energia nella transizione?** In primis, per la conservazione dell'energia  $E_i = E_f + T_R + E_\gamma$ , dove  $E_i$  ed  $E_f$  sono le energie dello stato iniziale e finale,  $T_R$  è l'energia cinetica con il quale il nucleo rincula e  $E_\gamma$  è l'energia del fotone  $\gamma$ . Per la conservazione del momento lineare  $0 = \vec{p}_R + \vec{p}_\gamma \Rightarrow |\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}_R|$ . Supponendo che il nucleo non perda massa  $M$  nel decadimento (anche se vi sono differenze di energie di legame tra nucleoni

che producono una leggera differenza) e che  $E_\gamma = cp_\gamma$  si ottiene una equazione quadratica in  $E_\gamma$

$$\Delta E = E_i - E_f = E_\gamma + T_R = E_\gamma + \frac{p_R^2}{2M} = E_\gamma + \frac{p_\gamma^2}{2M} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{c^2 2M}$$

Troviamo le soluzioni, scartando subito quella negativa vista la sua non fisicità

$$E_\gamma = Mc^2 \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}} \right] = Mc^2 [-1 + \sqrt{1+x}]$$

Espandiamo in serie di McLaurin intorno a  $\Delta E = 0$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Ottenendo

$$E_\gamma = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

e per  $A \approx 100$  e  $\Delta E = 1$  MeV il secondo termine vale 5 eV, che è quindi trascurabile. È lecito affermare che il fotone si porti via tutta l'energia della transizione

$$E_\gamma = \Delta E$$

(o meglio, la differenza di energia dello stato finale dallo stato iniziale la quantifico a meno di correzioni trascurabili misurando quella del  $\gamma$  emesso).

### 8.3.2 Classificazione delle transizioni elettromagnetiche

La radiazione elettromagnetica è composta, sul piano trasversale alla direzione in cui essa si propaga, dall'oscillazione di campo elettrico e magnetico. È fondamentalmente generata in due diversi modi:

- **Radiazione E**, l'oscillazione di una carica elettrica, corrispondente ad un campo elettrico oscillante genera un campo magnetico anch'esso oscillante
- **Radiazione M**, la variazione della corrente all'interno di una spira, o la variazione dell'oscillazione di un *loop* di corrente producono un campo magnetico oscillante, che a sua volta genera un campo elettrico oscillante

Con lo sviluppo in multipolo, si può associare al fotone un certo momento angolare (ma  $L \neq 0$  per complesse questioni quantistiche) e ad ogni valore si associa un nome diverso:  $L = 1$  dipolo,  $L = 2$  quadrupolo,  $L = 3$  ottupolo,  $L = 4$  esadecupolo.

Una radiazione generica quindi si può identificare con la sigla  $EL$  o  $ML$  a seconda che si tratti di tipo elettrico o magnetico e con  $L$  il valore di momento angolare associato.

Osserviamo ora la **parità** in queste transizioni. Siccome l'operatore parità trasforma le coordinate  $\vec{r} \Rightarrow -\vec{r}$ , chiamiamo **pari** le funzioni per cui  $\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r})$  e **dispari** le funzioni per cui  $\psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$ . Si ha che radiazioni di origine diversa hanno parità diversa in funzione del momento angolare.

- **Radiazioni E** hanno cambio di parità come

$$(-1)^L$$

Prendiamo ad esempio il caso di momento di dipolo magnetico ( $L = 1$ ). Si ha che  $\vec{d} = q\vec{r}$  e con la trasformazione  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  il momento cambia segno  $\vec{d} \rightarrow -\vec{d}$ ;

- **Radiazioni M** hanno cambio di parità come

$$(-1)^{L+1}$$

Prendiamo il momento di dipolo magnetico ( $L = 1$ ). Questo per trasformazione di parità non cambia di segno, dato infatti  $\vec{\mu} = q\vec{r} \times \vec{v}$ , se  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  e  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$  allora  $\vec{\mu} \rightarrow \vec{\mu}$  (infatti  $\mu$ , visto il prodotto vettoriale, è uno pseudovettore).

Siamo pronti a fare degli esempi.

La transizione  $3^+ \rightarrow 2^+$  è facile da classificare usando la formula  $\vec{I}_i \rightarrow \vec{I}_f + \Delta L$  e vedendo che la parità non cambia.

Dalle regole di composizione  $1 \leq \Delta L \leq 5$  e dato che la parità va mantenuta invariata, le possibili transizioni sono  $M1$ , poi  $E2, M3, E4, M5, \dots$ . **Più aumenta  $L$ , più la transizione è improbabile.** Ad esempio il  $^{117}\text{In}$  ha un decadimento  $1/2^- \rightarrow 9/2^+$  possibile solo con  $M4$  o  $E5$  che ha tempo medio pari a 116.2 minuti. Un'eternità a livello nucleare.

Da considerazioni di fisica classica si può ricavare la potenza emessa dall'oscillazione di un dipolo **elettrico** o di un dipolo **magnetico** (che come si può notare è diversa nei due tipi di radiazione, e dato che questa è collegata ad una probabilità di transizione lascia anche pensare che vi siano delle gerarchie tra diversi tipi di radiazione):

$$P(E1) = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} d^2 \qquad P(M1) = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^5} \mu^2$$

Vi è però un risultato di carattere generale, per la potenza di una **radiazione di multipolo**, ovvero, presa  $\sigma = E, M$  e  $L = 1, 2, 3, 4, \dots$  si ha che

$$P(\sigma L) = \frac{2c}{\epsilon_0} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{w}{c}\right)^{2L+2} \mathcal{M}(\sigma L)^2$$

dove  $\mathcal{M}(\sigma L)$  è l'ampiezza di oscillazione con momento  $L$ -esimo. Nel formalismo della meccanica quantistica si introducono degli operatori di transizione  $\hat{O}(\sigma L)$

che mappano  $\psi_i \rightarrow \psi_f$ , e di cui le ampiezze di oscillazione sono elementi di matrice

$$\mathcal{M}(\sigma L) = \mathcal{M}_{if}(\sigma L) = \int \psi_f^* \hat{O}(\sigma L) \psi_i dV$$

Vediamo un esempio esplicito di questo elementi di matrice, in particolare quelli dell'operatore  $\hat{O}(EL)$  che risulta essere  $\hat{O}(EL) = e r^L Y_L^M(\theta, \varphi)$ . Fisicamente ciò equivale ad espandere il campo elettrico (radiazione E) in termini delle armoniche sferiche. Per  $L = 1$  si ha  $ez$ , per  $L = 2$  si ha  $e(3Z^2 - r^2)$

Dividendo la potenza per l'energia del fotone si ottiene il **tasso di transizione**

$$T(\sigma L) = \frac{P(\sigma L)}{\hbar \omega} = \frac{2(L+1)}{\varepsilon_0 L [(2L+1)!!]^2 \hbar} \left(\frac{w}{c}\right)^{2L+1} B(\sigma L)$$

Dimensionalmente, questa espressione risulta essere una energia/tempo =  $[t^{-1}]$  che corrisponde a una costante di decadimento  $\lambda$ .  $B(\sigma L) = |\mathcal{M}_{if}(\sigma L)|^2$  è la **probabilità di transizione ridotta**. Calcolarle è davvero complicato, ma a questo ha lavorato a lungo Victor Weisskopf.

### 8.3.3 Stime di Weisskopf

Questa stime sono utili come confronto per i dati sperimentali. L'idea consiste nel prendere la transizione di particella singola tra due stati del modello a shell, considerando la **funzione d'onda costante sul volume del nucleo**. A volte si hanno risultati molto diversi dalla realtà, ma a noi interessano gli ordini di grandezza. Con le seguenti formule ho determinato una potenza e quindi trovo il tasso di transizione (e quindi  $\lambda$ )

$$B_{sp}(EL) = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 r_0^{2L} A^{\frac{2L}{3}}$$

$$B_{sp}(ML) = 10 \left(\frac{\hbar}{m_p c R}\right)^2 B_{sp}(EL) = \frac{e^2}{4\pi} 10 \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2 \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 r_0^{2L-2} A^{\frac{2L}{3}}$$

Si trova che le transizioni elettriche e magnetiche sono tra loro proporzionali

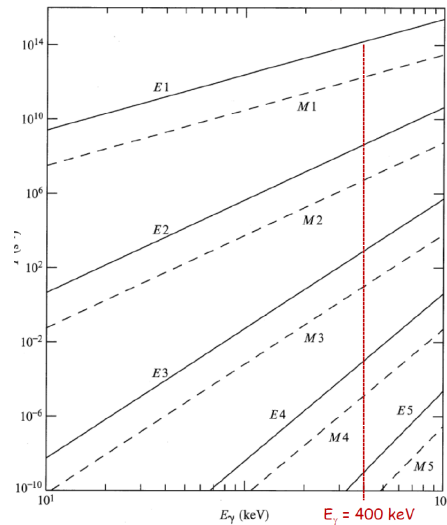
$$\frac{B_{sp}(ML)}{B_{sp}(EL)} \approx 0.31 A^{-\frac{2}{3}}$$

Con queste stime viene stabilita una **gerarchia** tra le varie tipologie di transizioni. Con  $A = 100$  e qualsiasi  $L$ , il rapporto vale  $10^{-2}$ , ovvero una transizione di tipo dipolo magnetico è 100 volte meno probabile di quello elettrico. Inoltre, le multipolarità più basse (dipolo < quadrupolo) dominano la transizione, ovvero

$$\frac{B_{sp}(E1)}{B_{sp}(E2)} = 10^{-4}$$

perché  $T(\sigma L^2) \propto (kR)^{2L}$  e  $kr \sim 10^{-2}$  perciò aumentando la  $L$  di uno diminuisco di  $10^{-4}$  la probabilità di transizione (inclinando sempre più la retta). Plottando

con scale logaritmiche su entrambi gli assi il tasso di transizione contro l'energia di uscita del  $\gamma$  ottenuto



Sperimentalmente, le stime di Weisskopf si usano come unità di misura per le probabilità di transizione. In tal modo, se otteniamo valori attorno a 1 per  $B$  (espresso in unità di  $B_{sp}$ ) sapremo che le ipotesi delle stime sono valide, e che quindi la transizione è effettivamente prodotta dal passaggio **di un solo protone** da una *shell* a un'altra. Se invece otteniamo multipli, ciò è indice di transizioni che coinvolgono **più protoni: transizioni collettive**. In effetti si trova che le stime di Weisskopf rispecchiano i comportamenti sperimentali per le  $B(E2; 2^+ \rightarrow 0^+)$  in corrispondenza dei nuclei magici, in cui il modello a shell è notoriamente adatto a descrivere la struttura dei nucleoni.

## 9 Sezione d'urto

La **sezione d'urto**, anche detta *cross-section*, è un'osservabile misurata negli esperimenti di collisione e ha le dimensioni di un'area. Consideriamo un *beam* con  $N_i$  particelle incidenti su un bersaglio di  $N_b$  particelle, che viaggiano a velocità  $v$  rispetto al bersaglio (in inglese *target*, da cui, impropriamente, il sinonimo *targhetta*). Il flusso di particelle incidenti è

$$\Phi = \frac{N_i}{\Delta S \Delta t} = \frac{N_i \Delta x}{\Delta S \Delta t \Delta x} = \frac{N_i v}{\Delta S \Delta x} = \frac{N_i v}{V} = n_i v$$

dove indichiamo con  $n_i$  la **densità di particelle del fascio incidente**. Il flusso di particelle inciderà  $N_b$  particelle del bersaglio e perciò

$$\frac{N_b}{\Delta S} = \frac{N_b \Delta x}{V} = n_b \Delta x$$



dove indichiamo con  $n_b$  la **densità di particelle colpite** dal fascio incidente. La cosa importante che comporta questa interazione è che alcune particelle vengono rimosse, ovvero il fascio incidente viene **attenuato** di

$$\Delta\Phi = -\Phi n_b \sigma \Delta x$$

Dividendo per  $\Phi$  otteniamo la **frazione di flusso disperso**

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = n_b \sigma \Delta x \Rightarrow \text{passando ai differenziali : } \Phi(x) = \Phi_0 e^{-n_b \sigma x}$$

Semplici considerazioni sono ad esempio, che all'aumentare dello spessore del *target* aumenta l'attenuazione ed essa aumenta anche aumentando la densità di particelle con cui interagire e l'**area di interazione efficace**  $\sigma$ .

La sezione d'urto si misura in **barn** (*barn* dall'inglese granaio perché stiamo comunque parlando di dimensioni più grandi a quelle in gioco in fisica nucleare,  $1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2$ )

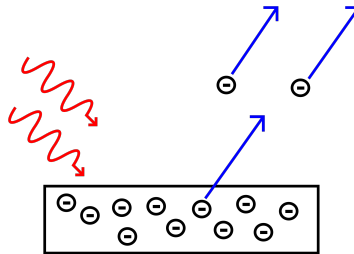
## 10 Interazione radiazione-materia

### 10.1 Radiazione elettromagnetica

In fisica nucleare ci concentriamo su raggi  $\gamma$  e X ad alta energia. A differenza della radiazione carica, che perde energia in modo continuo tramite una serie di tante interazioni, in questo caso diciamo che la radiazioni interagisce con la materia in **singoli eventi**. Esaminiamone uno per volta

#### 10.1.1 Effetto fotoelettrico

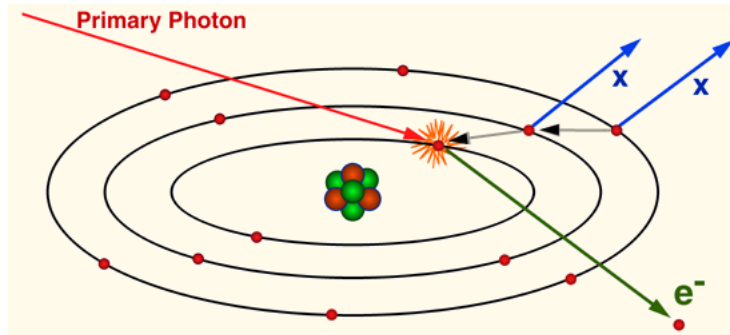
Spiegato da Einstein nel 1905 con la *Teoria dei quanti*.



Il fotone con energia  $E_\gamma$  incide un atomo e scalza un elettrone (solitamente uno di quelli più esterni) che esce con un'energia cinetica pari a  $T_\gamma = E_\gamma - B_e$  dove con  $B_e$  indichiamo la *binding energy* che trattiene l'elettrone legato all'atomo. L'energia del fotone viene totalmente assorbita nell'urto.

Se ad essere scalzato è un elettrone più interno, resta una lacuna e quindi elettroni in shell più esterne tendono occupare il buco. Il rilascio della differenza

di energia di questi elettroni può essere emessa tramite un fotone caratteristico (**fluorescenza**) oppure essere data ad un altro elettrone in un livello esterno che si stacca dall'atomo (**emissione Auger**).



La sezione d'urto del processo, ovvero la frequenza di queste interazioni, diminuisce all'aumentare di  $E_\gamma$  (sono molto più probabili a energie basse, poi subentrano anche altri tipi di interazioni) secondo la legge empirica

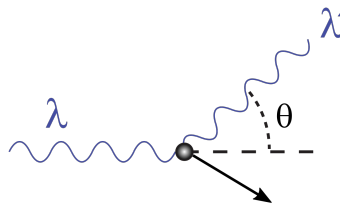
$$\sigma \propto \frac{Z^{4-5}}{E_\gamma^3}$$

Il fotoelettrico è importante fino a 400–500 keV. In più, se prendiamo l'esempio del piombo, il grafico della probabilità contro l'energia del fotone presenta una **discontinuità** esattamente in corrispondenza dell'energia della **shell K**. Questo accade perché l'energia del fotone deve superare la soglia dell'energia di legame di una certa shell per scalzare l'elettrone dall'atomo, dunque la sezione d'urto aumenta al superamento di tale soglia

In uno spettro energetico l'energia rilasciata per effetto fotoelettrico crea un picco ben definito, chiamato **fotopicco**.

### 10.1.2 Effetto Compton

Mentre nell'effetto fotoelettrico il fotone iniziale viene completamente assorbito dall'atomo, nello scattering Compton si ha un vero e proprio urto, dove **elettrone e fotone** interagiscono e **vengono diffusi**.



Supponendo che l'elettrone sia fermo all'inizio, scriviamo la conservazione dell'energia

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e$$

Per le ipotesi fatte,  $E_e = m_e c^2$  e  $E'_\gamma = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}$  e, esplicitando per  $(p_e c)^2$  la conservazione dell'energia si ottiene

$$(p_e c)^2 = (E_\gamma + m_e c^2 - E'_\gamma)^2 - (m_e c^2)^2$$

$$\Rightarrow (p_e c)^2 = E_\gamma^2 + \cancel{(m_e c^2)^2} + E'^2_\gamma + 2E_\gamma m_e c^2 - 2m_e c^2 E'_\gamma - 2E_\gamma E'_\gamma - \cancel{(m_e c^2)^2}$$

Si conserva anche la quantità di moto, ovvero

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_{\gamma'} + \vec{p}_e \Rightarrow p_e^2 = p_\gamma^2 + p_{\gamma'}^2 - 2p_\gamma p_{\gamma'} \cos(\theta)$$

dato che la differenza tra  $p_\gamma$  e  $p_{\gamma'}$  è esprimibile con il teorema del coseno. Moltiplichiamo il tutto per  $c^2$  al fine di poter eguagliare le due espressioni di conservazione esplicitate in  $(p_e c)^2$ .

$$(p_e c)^2 = p_\gamma^2 c^2 + p_{\gamma'}^2 c^2 - 2p_\gamma p_{\gamma'} c \cos(\theta)$$

e ricordando che  $E_\gamma = p_\gamma c$  e  $E_{\gamma'} = p_{\gamma'} c$  si giunge a

$$\cancel{E_\gamma^2} + \cancel{E_{\gamma'}^2} + 2E_\gamma m_e c^2 - 2m_e c^2 E'_\gamma - 2E_\gamma E'_\gamma = \cancel{E_\gamma^2} + \cancel{E_{\gamma'}^2} - 2E_\gamma E'_\gamma \cos \theta$$

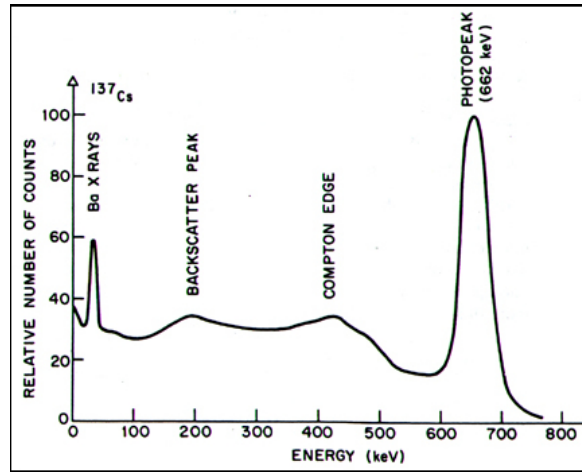
che riarrangiata diventa infine

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma^2}{2m_e} (1 - \cos \theta)}$$

Due casi particolari di questa sono un **angolo nullo** tra i vettori di elettrone e fotone diffusi. Il che,  $\theta = 0$ , porta a  $E'_\gamma = E_\gamma$ , ovvero non vi è praticamente interazione e il fotone passa indisturbato. Per  $\theta = \pi$  invece si ha *backward emission* e l'energia ceduta all'elettrone è massima. Qui si può prendere direttamente il limite, ovvero

$$E_c(E_\gamma \rightarrow \infty) = \frac{m_e c^2}{2}$$

esattamente metà massa dell'elettrone. Questo limite è evidenziato sperimentalmente dalla presenza negli spettri della **spalla Compton**, il limite energetico superiore di un raggio diffuso ( $\theta = \pi$ ), che corrisponde a  $E_\gamma - \frac{m_e c^2}{2}$ . La dipendenza **continua** dall'angolo  $\theta$  fa sì che sperimentalmente si ottenga un **continuo Compton**, una distribuzione continua di conteggi, da energia 0 fino alla spalla Compton. Nel grafico successivo vediamo un esempio di spettro energetico dove viene plottata l'energia del  $\gamma'$  che viene diffuso nel processo. Qui bisogna fare l'esercizio mentale di collegare la formula per  $E'_\gamma$  ricavata prima e collegarsi ai concetti di *compton edge*, *compton continuum* al variare di  $\theta$ .



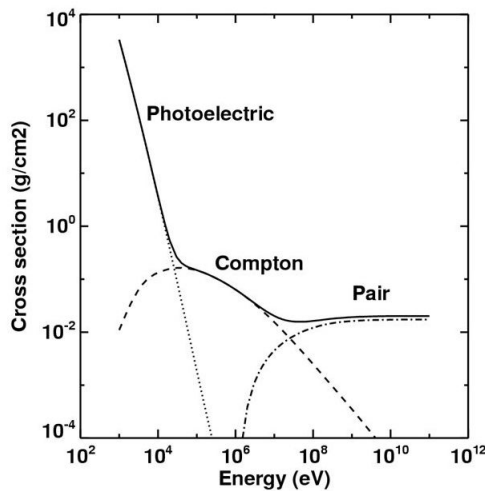
### 10.1.3 Produzione di coppie $e^+e^-$

Non appena si supera un'energia pari a  $2m_e c^2 \approx 1.022$  MeV, vi è la possibilità che un fotone produca una coppia positrone-elettrone. Il fatto che vi sia questa energia minima definisce il fenomeno come un'**interazione di soglia**. Ciò può avvenire solo nelle vicinanze di un atomo, il cui centro di carica possa accoppiarsi con il fotone (lo si vedrà nei corsi di Fisica Teorica più avanzati). Dalla conservazione dell'energia si ha

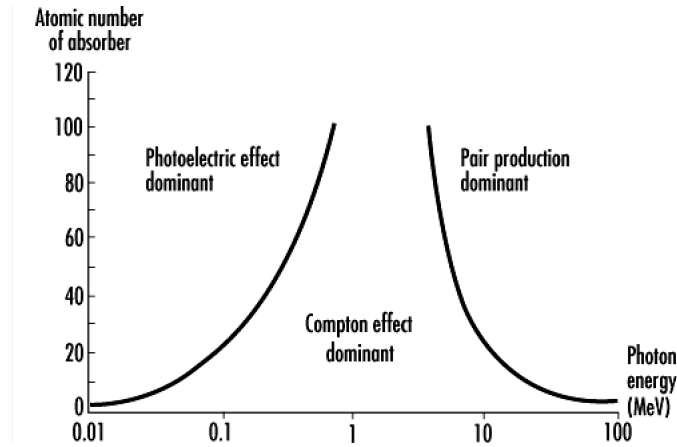
$$E_\gamma - 2m_e c^2 = T_{e^+} + T_{e^-}$$

Il positrone prodotto si annichila quasi istantaneamente con un altro elettrone emettendo due  $\gamma$  all'energia caratteristica di 511 keV.

### 10.1.4 Considerazioni generali



Questo grafico, della sezione d'urto (espressa in questo caso come coefficiente di attenuazione di massa in  $g/cm^2$ ) in funzione dell'energia del fotone incidente, mostra le gerarchie energetiche in cui si suddividono i tre tipo di interazioni.



Questo grafico mostra invece come vi sia una forte dipendenza in  $Z$ , a basse energie e alti numeri atomici infatti ci sono gli scattering di tipo fotoelettrico.

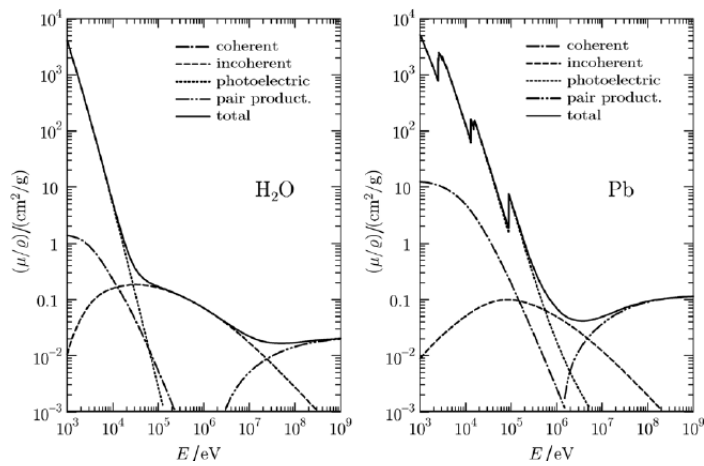
Resta un'ultima domanda, ovvero **come varia l'intensità di un fascio di fotoni nella materia?**. L'attenuazione è di tipo **esponenziale**. Tenendo conto di tutte e tre le interazioni possiamo trovare l'andamento funzionale dell'intensità di un fascio  $\gamma$  in funzione della distanza di penetrazione nel materiale. Infatti, calcolando la sezione d'urto di interazione totale dell'atomo,  $\sigma = \sigma_{pe} + Z \cdot \sigma_c + \sigma_{pp}$ . e detta  $dI$  la variazione infinitesima dell'intensità del fotone nello spessore infinitesimo  $dx$  si ha

$$dI = -N\sigma I dx \Rightarrow I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad \mu = N\sigma$$

dove  $\mu$  è il **coefficiente di attenuazione lineare** che ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Dividendo per la densità  $\rho$  si ottiene il **coefficiente di attenuazione di massa**  $\mu/\rho = \mu_{mass}$  e quindi

$$I(x) = I_0 e^{-\mu_{mass} \rho x} = I_0 e^{-\mu_{mass} d}$$

dove  $d$  è lo spessore del mezzo, misurato in  $g \cdot cm^{-2}$



Noto anche che nel caso del piombo, come detto sopra, vi sono delle discontinuità.

Si definisce **spessore di dimezzamento** la dimensione della targhetta tale per cui l'intensità del fascio incidente è dimezzata.

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu x_d} \Rightarrow x_d = \frac{\ln 2}{\mu}$$

## 10.2 Radiazione di particelle cariche

Con radiazione si intendono anche particelle  $\alpha$  o  $\beta$ , ovvero **radiazione carica**, a differenza di quella elettromagnetica. In generale, lo spazio occupato dagli orbitali elettronici è molto più grande di quello occupato dal nucleo, e perciò le particelle cariche tendono ad interagire con la nuvola elettronica, cedendo una certa quantità di energia ad ogni **interazione coulombiana**, mentre lo scattering con i nuclei è un processo molto più raro. Le particelle pesanti quindi ionizzano gli elettroni e procedono nella loro corsa quasi indisturbate, perdendo energia **in modo graduale** (al contrario di quanto accade con i  $\gamma$ ). È come fare bowling nel burro.



Consideriamo il caso di urto frontale tra una particella di radiazione di massa  $m_1$  e un elettrone  $m_2$  inizialmente fermo. Per la conservazione del momento lineare

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \Rightarrow m_1 (v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}$$

e dell'energia

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \Rightarrow m_1 (v_{1,i} + v_{1,f})(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}^2$$

Facendo [equazione equazione](#) ottengo  $v_{1,f} = v_{2,f} - v_{1,i}$ , che inserita nella conservazione del momento restituisce

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} \underset{m_1 \gg m_2}{\approx} 2v_{1,i}$$

La velocità è praticamente il doppio ma il momento degli elettroni resta comunque piccolo vista la loro massa minuta. Quindi,  $v_e \approx 2v_\alpha$  e perciò

$$E_e = \frac{1}{2} m_e 4v_\alpha^2 = \frac{1}{2} m_e \frac{m_\alpha}{m_\alpha} 4v_\alpha^2 = \frac{4m_e E_\alpha}{m_\alpha}$$

e da questa si ha un esempio delle energie in gioco. Prendendo un  $\alpha$  con  $E_\alpha = 6$  MeV, allora  $E_e = 4 \cdot 6 \cdot 0.511 / 4.931 = 3.3$  keV. La derivazione che abbiamo fatto è quella del caso specifico di urto frontale che avviene più raramente di collisioni ad un qualsiasi angolo e rappresenta il **massimo trasferimento di energia**. La stima media di energia trasferita si aggira attorno ai 100 eV. Per fermare una  $\alpha$  a 6 MeV serviranno quindi circa  $10^5 - 10^6$  collisioni!

La **traiettoria** delle  $\alpha$  è rettilinea fino a che la particella non perde energia, e avendo meno energia viene deviata maggiormente negli urti prima del suo arresto totale. La distanza percorsa dalla particella è definita come **range**.

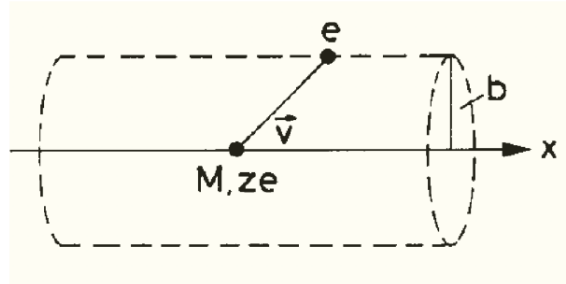
Gli elettroni scatterati in queste interazioni (che vengono poi letti dagli apparati strumentali sotto forma di correnti grazie al teorema di Shockley-Ramo) non sono subito stati identificati come tali e storicamente portano il nome di **radiazione  $\delta$**

### 10.2.1 Stopping power

La quantità di energia persa per unità di lunghezza attraversata da una particella carica in un mezzo materiale dipende sia da caratteristiche della radiazione incidente sia da caratteristiche del materiale attraversato. Tale dipendenza è schematizzata dalla **formula di Bethe-Bloch** (o **formula della stopping power**):

$$-\frac{dE}{dx} = \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\pi Z\rho N_A}{Am_e v^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e v^2}{I} \right) \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right]$$

dove  $v$  è la velocità della radiazione e  $z$  la sua carica (dipendenza **quadratica**).  $N_A$  è il numero di Avogadro, mentre  $A, Z, \rho$  sono parametri del materiale assorbente. La  $I$  è la **energia media di ionizzazione** di un atomo del materiale. Deriviamola (almeno in parte).



Ci chiediamo cosa succede all'elettrone nel passaggio della particella. Rappresentiamo la regione in cui avviene l'interazione come un **cilindro** di asse dato dalla traiettoria (considerata rettilinea) della radiazione incidente e **raggio**  $b$  (**parametro di impatto**). Complessivamente, il passaggio di  $M$  esercita un'interazione coulombiana su  $e$  che produce principalmente un **momento perpendicolare alla superficie del cilindro**. In altre parole  $M$  spinge via l'elettrone da tutti i punti dell'asse del cilindro, e perciò l'effetto netto è, in prima approssimazione, un allontanamento **radiale**. Possiamo calcolare il contributo alla variazione di impulso perpendicolare  $\Delta p_{\perp}$  alla traiettoria applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica infinitamente estesa

$$\Phi(E_{\perp}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} 2\pi b dx = \frac{Ze}{\epsilon_0}$$

Il momento trasverso si ottiene integrando la forza di Coulomb **perpendicolare** all'asse del cilindro:

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_{\perp} 2\pi b dx \left( \frac{1}{2\pi b v} \right) = e \frac{Ze}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi b v}$$

L'energia trasferita all'elettrone con parametro d'impatto  $b$  è

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} = \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{b^2} \frac{2}{m_e v^2}$$

Consideriamo ora l'interazione con molti elettroni anziché uno solo. Consideriamo una corona cilindrica di spessore tra  $b$  e  $b+db$  e lunghezza  $dx$ . Se la densità di elettroni per unità di volume  $n$  è data da

$$n = Z \frac{\rho}{A} N_A$$

dove questa formula la si ottiene dalla chimica

$$\frac{\text{atomi}}{\text{volume}} = \frac{\text{atomi}}{\text{grammo atomo}} \frac{\text{grammo atomo}}{\text{grammi}} \frac{\text{grammi}}{\text{volume}} = \frac{\rho N_A}{A}$$



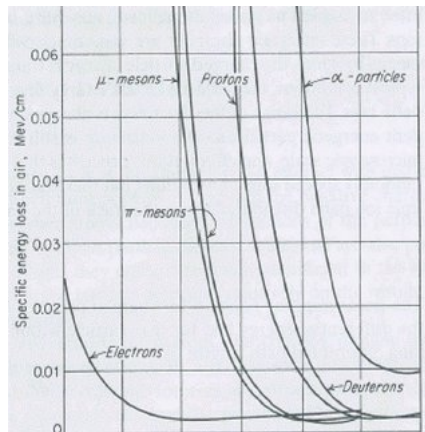
allora il numero di elettroni nello strato infinitesimo è dato da

$$N_e = n(2\pi b) db dx$$

e perciò la perdita di energia dovuta all'interazione con  $N_e$  elettroni alla distanza  $b$  è data da:

$$\begin{aligned} -dE(b) &= \frac{\Delta p^2}{2m_e} N_e = \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\pi}{m_e v^2} n \frac{db}{b} = \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\pi}{m_e v^2} Z \frac{\rho N_A}{A} \int_{-b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} \\ &= \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\pi}{m_e v^2} Z \frac{\rho N_A}{A} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \end{aligned}$$

Fino a questo punto della derivazione se n'è occupato Niels Bohr. Bethe e Block si sono invece occupati dell'aggiunta di **termini relativistici** che poi vengono evidenziati dai grafici della *stopping power* in funzione dell'energia della particella incidente. **Non vi è alcuna dipendenza dalla massa della particella incidente.** Inoltre, altro fatto controintuitivo, una particella **più veloce rilascia meno energia**, infatti la formula va, in termini di velocità, come  $v^{-2}$ .

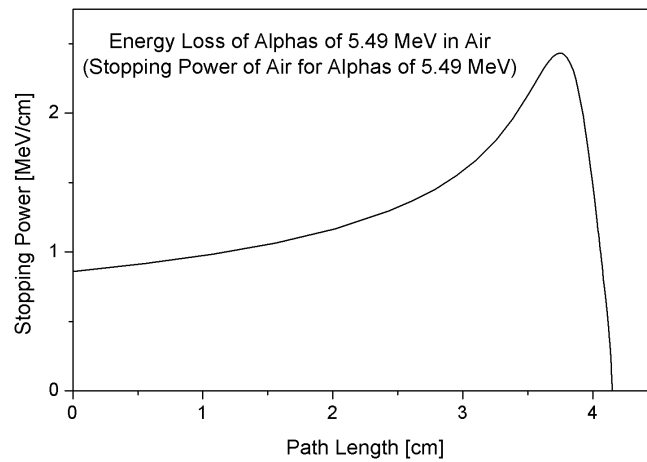


Da questo grafico si vede quanto detto in precedenza. Particelle lente rilasciano più energia. Inoltre, una particella di carica maggiore ingeragisce di più e rilascia più energia. L'andamento lineare per energie alte, dopo il minimo, è totalmente spiegato con effetti relativistici. Infatti, per un'energia cinetica  $K = 1$  MeV, ottenimao  $K = Mc^2(\gamma - 1) \Rightarrow 1 = (\gamma - 1)$  da cui  $\beta = 0.86$ . Ovvero, superata questa velocità gli effetti relativistici entrano in gioco.

Osservando la perdita di energia di ioni in un mezzo si ottiene un grafico chiamato curva di **Bragg**. La particolarità di questo andamento è che nella prima parte del percorso, ovvero quando le particelle sono veloci, la perdita di energia è minima, mentre il frenamento diventa più significativo più la particella rallenta. Vicino al completo arresto il lo *stopping power* ha un picco molto accentuato, nel cui integrale si rilascia la maggiore parte dell'energia iniziale.

Oltre il suddetto **picco di Bragg** la particella si ferma completamente. Al contrario della radiazione elettromagnetica, possiamo osservare **che tutte le particelle si arrestano nello stesso range**, senza seguire una legge esponenziale, quindi questo studio è molto utile per applicazioni nella schermatura di reazioni nucleari o sorgenti radioattive.

Applicazioni di questi fenomeni avvengono in **medicina nucleare** e dal seguente grafico si evince che ponendo il picco di Bragg esattamente sopra ad un eventuale tumore, è possibile bruciarlo rilasciando un grosso quantitativo di energia solamente nel punto desiderato, senza danneggiare troppo i tessuti circostanti.



## 11 Esercizi

1. Da  $s = vt$  ottengo  $t = \frac{s}{v}$  perciò l'unità di misura del tempo in fisica nucleare è  $\frac{fm}{c} \simeq 10^{-24} s$  (un tempo molto piccolo)
2. La **costante di struttura fine** è la costante di accoppiamento dell'interazione elettromagnetica (deve essere per definizione adimensionale). Si lega come:

$$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c}$$

Definisce il rapporto tra la velocità orbitale tangenziale dello stato fondamentale nel modello planetario di Bohr e la velocità della luce.

3. Dal principio di indeterminazione per energia e tempo  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$  moltiplico per  $c$ .  $\Delta E \Delta t c \geq \frac{\hbar c}{2}$  ottenendo  $\Delta E \Delta x \geq \frac{\hbar c}{2}$ . Sapendo che  $\hbar c \simeq 200 \text{ MeVfm}$  e che  $2 \text{ fm} \leq \Delta x \leq 8 \text{ fm}$  ottengo un intervallo di energie  $50 - 12.5 \text{ MeV}$ . Queste sono le energie che sente un nucleone.

4. Da  $E = h\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{2\pi 200 \text{ MeV fm}}{\lambda}$  che agli estremi  $2 \text{ fm} \leq \Delta x \leq 8 \text{ fm}$  vale  $2\pi(100 - 50) \text{ MeV}$ .